"Riesgo de crédito: El enfoque actuarial"

Javier Gutiérrez García , Jesús Alan Elizondo Flores

México

Resumen

Por la naturaleza de su operación, las instituciones de crédito se ven comúnmente expuestas a riesgos de diversa naturaleza. Ante esta realidad dichas instituciones deben contar con la solvencia necesaria para hacer frente a sus obligaciones a la vez de obtener un rendimiento sobre su capital.

Se ha observado en esta industria que algunas prácticas comunes tales como excesiva concentración en algunos ramos o sectores de la actividad económica o mala asignación de precios sobre los riesgos asumidos han resultado en pérdidas que ponen en riesgo la solvencia de las mismas en detrimento del público en general.

Un principio básico de la administración de riesgos señala que a mayor riesgo debe tenerse un mayor monto de recursos reservados para hacer frente al elevado monto de pérdidas que pudieren suscitarse.

Principalmente en el ámbito regulatorio se han realizado esfuerzos para establecer una relación directa entre el riesgo asumido por la institución y los recursos regulatorios necesarios para garantizar la solvencia de la misma. Estos regímenes regulatorios han atravesado por periodos difíciles, en los cuales se observaron eventos adversos tanto en el desarrollo económico del país como en la suerte de algunos sectores específicos de la economía. Estos eventos, así como el desarrollo de metodologías sofisticadas de medición de riesgos, tanto en el ámbito nacional como internacional, han favorecido la evolución del marco regulatorio hacia un marco orientado a la creación de recursos regulatorios para hacer frente a eventos extremos.

Es dentro de este marco que se presenta el siguiente documento, en el cual se propone colaborar con una aplicación de la teoría del riesgo para la cuantificación de las pérdidas de las instituciones de crédito.

El objetivo del presente documento es construir un marco teórico que permita mostrar las diversas dificultades que se presentan en la medición del riesgo de crédito de las instituciones bancarias y como pueden ser resueltas con la aplicación de diversas herramientas de la teoría de riesgo. Se hace particular énfasis en los problemas que enfrentan las instituciones cuyo entorno es volátil.

Como primera referencia se señalan los modelos más básicos para la medición del riesgo de crédito de un portafolio bancario, señalando en todo momento los supuestos realizados y el porqué resultan restrictivos. El documento procede relajando gradualmente cada uno de los supuestos mencionados hasta alcanzar un modelo apegado a la realidad observada en países emergentes.

En el desarrollo del documento no se propone reducir la incertidumbre, ya que esta es invariable desde el punto de vista de la institución bancaria. En contraposición se declara como un resultado importante el hecho de que, si bien la incertidumbre es inevitable, el monto de pérdidas de la institución puede ser controlado mediante un diseño cuidadoso de su portafolio.

Mediante la aplicación de las metodologías presentadas a una cartera de créditos relacionada con el ámbito hipotecario, se ilustra la capacidad de la teoría de riesgo para modelar este problema.

Palabras clave: Riesgo de crédito o crediticio, portafolio, teoría de riesgo, distribución de pérdida.

"Credit Risk: The Actuarial Vision"

Javier Gutiérrez García , Jesús Alan Elizondo Flores

México

Summary

Because of their operation nature, credit institutions are commonly expose to different kinds of risks. Under this reality the institutions need to have the necessary solvency to afford their obligations while obtaining some interest from their capital.

It has been notice in this industry that some common practices like the excessive concentration in some branches or activity sectors of the economy or the poor assignation of prices upon the acquired risks result in losses which put in risk the solvency of this ones in detriment of the general public.

A basic principle of risk management indicates that for more risk it is necessary to hold a bigger amount of resources to afford the high amount of losses that could happened.

Mainly in the regulatory circuit efforts had been realised to establish a direct relation between the acquired risk of an institution and the necessary regulatory resources to guarantee the solvency of it. This regulatory practices have pass throw difficult periods, in which was observed some adverse events in the economic development of the country and in some specific sectors of it. Such events, as well as the development of sophisticated methodologies of risk measure on the national and international scope, have favour the evolution of a regulatory framework toward the creation of regulatory sources to afford extreme events.

Is into this context that the next document is presented with the purpose to collaborate with an application of the risk theory for the measure of the losses of the credit institutions.

The objective of the present document is to build a theory framework that allows to show the difficulties which arrive from the credit risk measure of the bank institutions and how can they be solve with the use of several risk theory instruments. Particular emphasis is made on the problems that afford the institutions involved in a volatile environment.

As a first reference it is pointed out the most basic models for the credit risk measure of a bank portfolio, indicating at every moment the assumptions made and why they are restrictive. The document proceeds to relax gradually each of the assumptions mention until a model close to the reality of emerging countries is reached.

The document does not propose a way to reduce the uncertainty, since this is invariable from the point of view of a bank institution. In contra-position it is declare as an important result the statement that, if

well the uncertainty is inevitable, the amount of losses of the institution can be control by a careful portfolio design.

The capacity of risk theory to model this problem is illustrated by the application of the presented models to a credit portfolio related to the mortgage environment.

"Riesgo de crédito: El enfoque actuarial"

Javier Gutiérrez García, Jesús Alan Elizondo Flores

México

INTRODUCCIÓN

La incertidumbre es una de las características principales con las cuales debe vivir una institución financiera. Una amplia serie de fenómenos, cuyo comportamiento es impredecible, tiene un impacto directo en el desempeño de dichas instituciones. En el caso de las instituciones de seguros, éstas tienen que realizar erogaciones por concepto de accidentes u otros eventos asegurados. En el caso de instituciones bancarias, éstas tienen que crear reservas preventivas y capital para hacer frente a pérdidas originadas tanto por la calidad crediticia de sus acreditados como por los cambios en los factores de mercado que afectan sus portafolios.

El análisis de las variaciones de factores cuyo comportamiento es impredecible puede ser realizado por medio de diversas herramientas estadísticas, lo cual, en el caso particular de las compañías de seguros, ha dado lugar a la **teoría del riesgo.** Una de las aplicaciones tradicionales de la teoría de riesgo es encontrar la distribución de probabilidad de pérdida originada por los instrumentos financieros adquiridos por un conjunto de individuos.

El desarrollo de la teoría de riesgos ha permitido a las compañías de seguros conocer mejor la exposición de sus portafolios y establecer las pérdidas a las cuales se expone. Sólo recientemente es que se ha explotado esta herramienta en el ámbito bancario debido a la similitud existente con el principal riesgo que las instituciones bancarias enfrentan, el riesgo de crédito.

La similitud en la exposición de las compañías aseguradoras e instituciones bancarias

El problema de estimar las pérdidas por riesgo de crédito de una cartera presenta ciertas similitudes con los portafolios de asegurados. El incumplimiento de un crédito es un evento incierto al igual que el siniestro de un asegurado. Existe un monto asegurado, así como un monto total de crédito otorgado. En seguros se prevé un porcentaje de siniestralidad esperado para el cual pueden construirse reservas de la misma forma que deben constituirse reservas preventivas para el riesgo crediticio. Dicho porcentaje de siniestralidad está comúnmente sujeto a variaciones debido a condiciones que afectan la naturaleza del siniestro, por lo que pueden presentarse años con altos índices de siniestralidad. De la misma forma, existen factores de riesgo que motivan incumplimientos crediticios mayores con respecto a los años anteriores generando pérdidas no esperadas para la institución.

En resumen, ambos problemas pueden ser modelados por una distribución de pérdidas que lleve a cuantificar el fenómeno, para lo cual, la teoría de riesgo ha resultado una herramienta de gran utilidad en el ámbito de los seguros.

Distribución de pérdida

Una distribución de pérdida proveniente del análisis de un portafolio indica las posibles pérdidas en un periodo determinado y permite tomar en cuenta diversas características colectivas del grupo de individuos que lo conforman, tales como efectos de concentración y granularidad. Este tipo de distribuciones da origen a medidas que se conocen en el ámbito de las finanzas con el nombre de Valor en Riesgo (VaR)[i], mismas que han sido promovidas y avaladas por organismos internacionales regulatorios, tales como el Comité de Basilea, para medir el riesgo de mercado.

Recientemente el uso de la teoría de riesgo ha sido explotada exitosamente en el ámbito bancario para construir la distribución de pérdidas de portafolios crediticios. En 1997 *Credit Suisse Financial Products* (CSFP) publicó el modelo CreditRisk$^+$ para la medición del riesgo de crédito. El modelo CreditRisk$^+$ resuelve muchas de las críticas que se han hecho a los esquemas regulatorios vigentes para cuantificar las pérdidas por riesgo de crédito.

El presente documento elabora un esquema de análisis del riesgo de crédito basado en la teoría de riesgo. El objetivo es partir de los modelos más sencillos de la teoría de riesgo y derivar los modelos actuariales utilizados actualmente para construir las distribuciones de pérdidas por riesgo de crédito. Gradualmente, los supuestos de los primeros modelos son analizados señalando, en su caso, su incompatibilidad con la realidad y añadiendo mejoras al mismo. Este proceso se sigue hasta alcanzar el modelo CreditRisk,$^+$.

De esta forma, en la siguiente sección, se modela el riesgo de crédito a través de la teoría de riesgo individual. Las siguientes secciones prosiguen con el análisis haciendo uso de la teoría de riesgo colectiva y llegando gradualmente al modelo CreditRisk$^+$. En la última sección se presenta una ilustración de los diversos modelos de riesgo presentados a lo largo del documento.

La teoría de Riesgo Individual y el Riesgo de Crédito

Las matemáticas actuariales surgen de la necesidad de las empresas aseguradoras de elaborar una serie de cálculos (de primas, reservas, etc.) para realizar su negocio. Anteriormente estos cálculos se basaban en aproximaciones deterministas, por ejemplo, tasas de interés fijas, o bien, tablas de decremento que expresan las probabilidades de muerte o de sobreviviencia. En realidad estos y otros datos son variables que anteriormente sólo su valor esperado era considerado. Así, con la finalidad de tomar en cuenta las fluctuaciones que afectan a las empresas aseguradoras, surgió una gran cantidad de estudios cuya agrupación se denomina teoría de riesgo (Beard 1984, Gerber 1979, Bühlmann 1970).

Al igual que ocurrió con la medición de los componentes aleatorios de una aseguradora, la medición del riesgo de crédito tuvo como primer enfoque un modelo basado en los datos promedio. Mediante la obtención de la probabilidad de incumplimiento y del monto esperado se obtiene la pérdida esperada de un crédito, la cual bastaba para clasificar los créditos en "buenos" o "malos". Pero al igual que en las empresas aseguradoras, dichos datos son variables. Un crédito "bueno" puede volverse "malo" si las condiciones que lo afectan dan un giro desfavorable. Así, dada la importancia que tiene el riesgo de crédito en los sistemas bancarios, es sumamente importante considerar las fluctuaciones competentes para prevenir pérdidas (no esperadas).

Fundamentos

La teoría de riesgo individual modela a cada individuo como una entidad independiente. Esta asigna un patrón de comportamiento individual y agrega a los integrantes del grupo para obtener resultados conjuntos. De esta forma, en un primer momento, se procederá a explicar el modelo de comportamiento individual en un contexto de riesgo de crédito.

En términos generales, el resultado de un crédito otorgado puede manifestarse de dos formas:

1. La contraparte liquida el monto pactado originalmente.
2. La contraparte se declara insolvente y no paga la totalidad del préstamo otorgado.

La institución bancaria no sufre ninguna pérdida con la primera alternativa, mientras que sufre una pérdida con la segunda.

Aunque la institución no puede saber de antemano el resultado, el análisis de los aspectos apropiados del acreditado resultan ser un buen indicador de cuál podría ser la resolución del crédito. Con ello, el banco puede asignar una probabilidad al evento de que el acreditado liquide el monto dentro del plazo pactado.

Las instituciones que otorgan créditos buscan hacerlo a personas solventes que paguen sus créditos. Por ello, la probabilidad de que un acreditado incumpla suele ser pequeña. Desde luego esta probabilidad es diferente para cada acreditado dado que depende de las características distintivas de cada uno. Existe una diversidad de estudios dedicados a resolver este problema, sin embargo, en este documento no se pretende estudiar los procesos para determinar la probabilidad de incumplimiento de los acreditados (pérdida esperada) por ser un fenómeno ampliamente analizado (Altman 1977, 1989, Chorafas 1991, Trippi 1996). De esta forma, en lo sucesivo se dará por conocida la probabilidad de incumplimiento p.

Con ello, la pérdida que un banco o cualquier institución crediticia puede sufrir por el otorgamiento de un crédito se puede modelar por medio de una variable aleatoria X. Misma que se compone de dos variables aleatorias: una que modela el evento de la resolución del crédito y otra que modela el monto de la pérdida.

La resolución del crédito se modela a través de una función indicadora I. Esta toma el valor de uno cuando el crédito incumple y cero en el caso contrario

$$I = \begin{cases} 1 & p \\ 0 & 1-p \end{cases}. \qquad (1)$$

A su vez el monto de la pérdida se modela a través de una variable aleatoria M. Con lo cual la variable aleatoria X queda definida como

$$X = M \cdot I. \qquad (2)$$

Con esto se puede obtener tanto el valor esperado de la pérdida de un crédito, como la varianza

$$E[X] = m \quad V(X) = m^2 p(1-p) + s^2 p \qquad (3)$$

donde $m = E[X|I=1]$ y $s^2 = V(X|I=1)$ son la media y la varianza de la pérdida dado el incumplimiento del crédito.

De esta manera, queda definida la esperanza y la varianza de la pérdida de un crédito en lo individual.

Riesgo de crédito de una cartera de individuos

En el análisis de riesgo de crédito propuesto en el presente documento lo que interesa, más que el estudio individual de cada crédito, es el comportamiento de una cartera en su conjunto con la finalidad de estudiar el riesgo al que esta sujeta la institución prestadora de créditos tanto por efectos de granularidad así como por el comportamiento conjunto de los créditos. Por ello el propósito del siguiente análisis es encontrar una distribución probabilística que indique las pérdidas potenciales a las que esta sujeta la cartera de créditos.

El primer paso es asignarle a cada crédito su correspondiente variable aleatoria X_i y definir $S = X_1 + X_2 + \mathrm{K} + X_n$ como la variable aleatoria que representa la pérdida por riesgo de crédito en la cartera. En este caso, n es una constante que representa el número de créditos que conforman la cartera.

Por el momento se hace el supuesto de que las pérdidas individuales de cada crédito son independientes unas de otras. Es decir, el que un acreditado incumpla no implica que otro también lo hará.

Asimismo en este modelo se considera imposible la alteración del número de créditos en la cartera durante el periodo analizado. Esto impide la integración de más créditos a la cartera así como la salida de los mismos.

El problema ahora consiste en encontrar la distribución de pérdida de la cartera donde cada crédito tiene su propio monto y probabilidad de incumplimiento, los cuales no son necesariamente iguales. Para ello existen varios métodos como convolución, generadora de momentos y aproximación Normal que permiten conocer la distribución de una variable compuesta por la suma de variables aleatorias individuales (Bowers 1986).

Uno de los métodos más utilizado para obtener la distribución de pérdida de una cartera consiste en aproximar ésta por medio de una distribución de probabilidad Normal. Esta aproximación requiere que los créditos que componen la cartera tengan una probabilidad de incumplimiento común. Las variables de cada crédito quedan definidas de la siguiente manera

$$X_i = \begin{cases} M_i & p \\ 0 & 1-p \end{cases}. \tag{4}$$

Bajo el supuesto de independencia se tiene que el valor esperado y la varianza de pérdida de la cartera son

$$E[S] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} pM_i = pV \tag{5}$$

$$V(S) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = p(1-p)\sum M_i^2 \tag{6}$$

donde $V = \sum_{i=1}^{n} M_i$ es el monto total de la cartera.

A pesar de que los montos son distintos, la distribución puede aproximarse por medio de la distribución Normal (DeGroot 1988)

$$S - N\left(Vp,\, p(1-p)\sum_{i=1}^{n} M_i^2\right). \tag{7}$$

El Modelo de Riesgo Individual: Granularidad y Capital Económico.

Como se mencionó en la sección anterior, la razón por la cual se trata de obtener una distribución de pérdida por riesgo de crédito es que esta indica la cantidad monetaria que una institución pone en riesgo por la posesión de una cartera crediticia.

Con la ayuda de la distribución de pérdidas, el Valor en Riesgo (VaR_α) representa la cantidad monetaria necesaria para afrontar las pérdidas de la cartera con un nivel de confianza a, comúnmente bajo y, por tanto, representando un escenario grave y poco probable[ii].

A continuación, con el fin de asociar el modelo anterior (7) y el problema de granularidad, se determinará el VaR de una cartera de créditos con el método de *aproximación Normal*.

Haciendo uso de los conceptos mencionados anteriormente se tiene que el Valor en Riesgo es

$$VaR_a = pV + z_a\sqrt{V(S)} = pV + z_a\sqrt{p(1-p)\sum_{i=1}^{n} M_i^{\,2}}\ , \tag{8}$$

donde z_a es el percentil correspondiente al nivel de confianza a de una variable Normal estándar.

Ahora bien, al dividirse la ecuación sobre el monto total de la cartera se tiene una relación (ver Márquez 1999) entre el Valor en Riesgo y la granularidad de la cartera medida a través de índice Hirschman -Herfindahl (Shy 1995, Tirole 1995)

$$\frac{VaR_a}{V} = p + z_a\sqrt{p(1-p)H(M)} \tag{9}$$

donde $H(M) \equiv \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{M_i}{\sum_{i=1}^{n} M_i}\right)^2$ es el índice Hirschman-Herfindahl.

Cuando se asocia esta relación al capital bancario C buscando que sea mayor al Valor en Riesgo se obtiene la ecuación propuesta por Márquez (1999)

$$VaR_a \le C \Leftrightarrow \Psi \equiv \frac{C}{V} \ge p + z_a\sqrt{p(1-p)H(M)}\ , \tag{10}$$

la cual relaciona el capital bancario con la probabilidad de incumplimiento, el nivel de confianza del Valor en Riesgo z_α y la granularidad de la cartera. Con lo cual se muestra que la granularidad de la cartera es una fuente importante de riesgo para los bancos.

La concentración en la distribución de montos o granularidad se da cuando una gran cantidad del monto total de la cartera esta agrupada en pocos créditos. Por ejemplo, una cartera con un monto total de $1,000,000 compuesta por mil créditos, uno de los cuales tiene un monto de $900,000, suele corre mayor riesgo de perder dicha cantidad que una cartera cuyo monto total se reparte uniformemente. En la primera tan sólo es necesario el incumplimiento del crédito grande, mientras que en la segunda se necesita el incumplimiento de por lo menos novecientos de los créditos.

Esto se ve al ser necesario más capital o menos probabilidad de incumplimiento en la ecuación anterior aplicada a una cartera con dichas características. Por ejemplo, si la probabilidad de incumplimiento es de 1.06% y el nivel de confianza es 0.01 el capital bancario necesario para las carteras anteriores es:

Tabla 1-Ejemplo de granularidad.

Cartera	*H*(*M*)	Capital bancario
1	.81	$224,983.51

2	.001	$18,132.66

Aunque se suele pensar que el incumplimiento conjunta de varios créditos es poco probable, no lo es cuando el incumplimiento de un crédito desencadena el incumplimiento de otros, es decir, cuando existen correlaciones entre los créditos. Estas correlaciones se pueden deber a que los acreditados forman parte de un mismo sector industrial, región geográfica y que por tanto están sujetos a una misma serie de factores exógenos que afectan su solvencia. La concentración se da cuando una gran parte del monto total de la cartera esta agrupada en acreditados cuya solvencia depende de uno o más factores externos, en donde externos se refiere a que están fuera del control de la institución prestadora.

Una manera de enfrentar la concentración en este tipo de casos es estimar las correlaciones entre acreditados. Con éstas y por medio de una aproximación Normal es posible obtener una relación explícita, similar a la anterior, entre el Valor en Riesgo y la concentración de un portafolio.

Sin embargo, la aproximación por este método enfrenta dos problemas importantes.

Primero, el uso de la distribución Normal supone que la distribución de pérdidas es simétrica, cuando empíricamente ha mostrado ser sesgada hacia las pérdidas. En otras palabras, más de la mitad de las pérdidas que ocurren son menores a la pérdida esperada. Esto por la existencia de créditos con montos superiores al promedio que provocan eventuales pérdidas superiores a la esperada.

Segundo, la estimación de correlaciones entre acreditados requiere de supuestos adicionales, así como de información detallada, mientras que existen otras herramientas de la teoría del riesgo que permiten atacar el problema de forma alternativa.

De esta forma, la teoría de riesgo individual es una herramienta útil para modelar el riesgo de crédito, sin embargo, esto se consigue a costa de varios supuestos. En particular quedan por resolverse las siguientes preguntas:

- ¿Cómo obtener una distribución de pérdidas con créditos no independientes?
- ¿Cómo estimar una distribución de pérdidas consistente con la observada en la realidad?

En la siguiente sección se desarrolla un modelo de riesgo colectivo que pretende lograr una mejor estimación del riesgo crediticio.

LA TEORÍA DE RIESGO COLECTIVO Y EL RIESGO DE CRÉDITO.

Introducción.

Contraria a la teoría del riesgo individual, la colectiva usa un modelo probabilístico para estimar las pérdidas totales del grupo sumando exclusivamente los montos de los individuos que observaron pérdidas.

De esta forma, las pérdidas en un modelo de riesgo colectivo se modelan con base en un proceso aleatorio único. La formulación matemática del modelo parte de la suma aleatoria

$$S = X_1 + X_2 + \ldots X_N \tag{11}$$

donde, a diferencia del modelo de riesgo individual, N es una variable aleatoria que representa el número de incumplimientos observados en la cartera para un periodo dado y X_i es el monto perdido por el i-ésimo crédito incumplido.

Este tipo de modelos se dice *Procesos Compuestos* ya que involucran dos procesos aleatorios: el proceso del número de incumplimientos y el proceso del monto de las pérdidas. La teoría colectiva de riesgo desarrolla primeramente un modelo para el número de siniestros (incumplimientos) y luego, a partir de éste, uno para las pérdidas agregadas del portafolio.

En esta sección se analiza el proceso *Poisson Compuesto* en un contexto de riesgo de crédito. Posteriormente, en la siguiente sección, se introduce el *Proceso Pólya Compuesto*, mismo que permite incorporar el efecto de no independencia entre los créditos y llegar al modelo CreditRisk+, actualmente utilizado por Credit Suisse.

Fundamentos

El modelo Poisson Compuesto supone que el número de incumplimiento de un portafolio se distribuye con una función de probabilidad Poisson. Lo cual implica una serie de supuestos válidos en el campo de los seguros y cuya validez conviene analizar en los portafolios de crédito. A continuación se desarrolla este modelo en un contexto de riesgo crediticio.

En una cartera de crédito, existe el interés de conocer el número de incumplimientos en un periodo. Sin embargo, los incumplimientos ocurren de tal manera que no es posible pronosticar el número exacto de sucesos, ni el momento exacto de su acontecimiento. Por esto, una de las mejores formas de describir el comportamiento del número de incumplimientos de una cartera es definiendo un modelo de distribución de probabilidades de la siguiente forma:

Sea $p_n = \Pr[N = n]$ la probabilidad de que ocurra exactamente n incumplimientos en la cartera de créditos analizada.

En diversas aplicaciones probabilísticas (teoría de colas, control de calidad) en las cuales se requiere modelar el número de ocurrencias en un periodo suele usarse la distribución Poisson, cuya forma es

$$p_n = \frac{e^{-m} m^n}{n}. \tag{12}$$

La razón de utilizar la distribución Poisson es porque, como es sabido, bajo el supuesto de independencia entre acreditados el número de incumplimientos tiene una distribución binomial, misma que puede aproximarse por una distribución Poisson (***aproximación Poisson***) cuando los créditos tienen probabilidades de incumplimiento uniformemente pequeñas y el número de créditos en la cartera es lo suficientemente grande (Daykin 1994).

Otra razón es porque su "forma exponencial es esencial para tener un modelo computacionalmente fácil de calcular" (Gordy 1998). Además, la distribución sólo depende del parámetro m y no del número de créditos ni de las probabilidades de incumplimiento individuales.

Como se sabe, la media de una distribución Poisson es el propio parámetro m. En este caso m representa el número esperado de incumplimientos de la cartera en el periodo. De aquí que al número esperado de incumplimientos en la cartera a lo largo del tiempo se le denomine "tasa de quiebra" y se denote por λ. En la presente sección la tasa de quiebra es constante e igual a m.

Proceso Poisson Compuesto

Hasta ahora se ha supuesto una distribución de probabilidad para el número de incumplimientos de un portafolio de crédito, es decir, para la variable aleatoria N, pero el interés es encontrar una distribución para las pérdidas de la cartera. Dichas distribuciones son diferentes porque una determinada pérdida en un año puede obtenerse por el incumplimiento de un sólo crédito con un monto grande, así como del incumplimiento de muchos créditos con montos pequeños. Por lo tanto, la expresión del monto de pérdidas agregadas S depende no solamente de las probabilidades de incumplimiento p_n sino también de los montos.

El evento de sufrir una pérdida menor a cierta cantidad específica puede ocurrir de distintas maneras. La primera es que no ocurra ningún incumplimiento. La segunda es que ocurra un incumplimiento cuyo monto sea menor a la cantidad especificada. La tercera es que ocurran dos incumplimientos cuyos montos sumen algo menor a la cantidad determinada. Y así sucesivamente puede ocurrir un gran número de incumplimientos siempre y cuando la suma no sea mayor a la cantidad especificada.

Así, como el monto perdido de un crédito incumplido no depende del número de incumplimientos ocurridos, se pueden aplicar las reglas de adición y multiplicación de probabilidad para expresar la distribución del portafolio como

$$F_S(s) = \Pr[S \le s] = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot \Pr\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \le s\right]. \tag{13}$$

Ante esta fórmula se observa la necesidad de contar con la convolución de las distribuciones individuales de los montos, la cual no siempre se puede obtener de manera sencilla[iii].

En principio podría parecer muy complicado el cálculo de la distribución de pérdidas utilizando la distribución empírica de los montos. Sin embargo, existen fórmulas recursivas que facilitan el cálculo. Para lo cual es necesario que la distribución compuesta cumpla con las siguientes condiciones:

1. Las probabilidades de incumplimiento deben seguir la fórmula de recurrencia $p_n = \left(a + \frac{b}{n}\right) \cdot p_{n-1}$ para n=1,2,3..... donde a y b son constantes definidas por la distribución de incumplimientos.

2. La probabilidad de que la pérdida de un crédito incumplido sea una cantidad específica debe ser la misma para todos los créditos de la cartera. Matemáticamente equivale a decir que las variables aleatorias del tamaño de los montos perdidos deben ser independientes e idénticamente distribuidas.

3. La distribución del tamaño de las pérdidas debe ser no negativa, discreta y equidistante, es decir, los montos de los créditos incumplidos deben poder ser expresados de la siguiente manera $M_i = L \cdot i$ para i=0,1,2...,r donde L es un número positivo.[iv]

Si la distribución compuesta cumple con estas tres condiciones, entonces la probabilidad de que ocurra una pérdida de tamaño $h \cdot L$ es

$$A_h = \frac{1}{1 - a \cdot s_0} \sum_{j: v_j \le h} \left(a + v_j \frac{b}{h}\right) \cdot s_{v_j} \cdot A_{h - v_j} \qquad h = 1,2,.....$$

$$A_0 = \begin{cases} p_0 & s_0 = 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} p_n s_0^{n*} & s_0 > 0 \end{cases} , \tag{14}$$

donde $s_{v_j} = \Pr\left[X = L \cdot v_j\right]$, $s_0^{n*} = \Pr\left[X_1 + X_2 + \mathrm{K} + X_n = 0\right]$ y v_j representa el monto común de la j-ésima banda en unidades de L (ver Panjer 1980 y Daykin 1994).

La distribución Poisson verifica la primera condición $p_n = \left(0 + \frac{m}{n}\right) \cdot p_{n-1}$.

Asimismo, para verificar la tercera condición, se agrupa los montos en bandas, de tal manera que aquellos montos pertenecientes a un mismo intervalo se redondean a una misma cifra. Al hacerse esta aproximación es fácil construir la distribución del tamaño de los montos para que también se cumpla la segunda condición.

El redondeo de los montos tiene como efecto una reducción considerable de la cantidad de información que se usa en el modelo. Y permite, junto con la a*proximación Poisson,* tener un método sencillo y manejable para una gran cantidad de créditos. Aunque es verdad que el agrupamiento introduce una aproximación en los cálculos, ésta es insignificante si hay muchos créditos y el ancho de las bandas es pequeño en comparación al monto promedio del portafolio. Intuitivamente esto corresponde al hecho de que la precisión de los montos no es determinante en la totalidad del riesgo.

De esta forma, aplicando la fórmula recursiva a la distribución Poisson Compuesta de la cartera de crédito se tiene que la probabilidad de sufrir una pérdida de tamaño $h \times L$ es

$$A_h = \sum_{j:v_j \leq h} \left(\frac{v_j m_j}{h} \right) A_{h-v_j} \qquad h = 1,2,\ldots..$$

$$A_0 = e^{-m} \qquad (15)$$

en donde m sigue representando el número esperado de incumplimientos de la cartera, mientras que m_j representa el número esperado de incumplimientos de la j-ésima banda.

Como puede observarse, esta distribución no requiere de muchos datos, ni de gran complejidad computacional para su cálculo. Además, al considerar la distribución empírica de los montos, la distribución es consistente con la realidad.

Sin embargo, para que la distribución Poisson esté aplicada correctamente es necesario que se verifiquen las siguientes condiciones:

1. La probabilidad de que un incumplimiento suceda en un momento específico es igual a cero.

2. La probabilidad de que dos o más incumplimientos ocurran al mismo tiempo es cero.

3. El número de incumplimientos en cualesquiera dos lapsos de tiempo disjuntos son independientes uno del otro.

Debido a que es imposible pronosticar el momento exacto de un incumplimiento, la primera condición se verifica en cualquier cartera de créditos. En cuanto a la segunda condición, la única manera de invalidarla es suponiendo que el incumplimiento de varios créditos se debe a una misma causa. Esto resulta muy difícil porque los acreditados son distintos, incluso si dos créditos estuvieran a favor de un mismo acreditado se pueden considerar como un sólo crédito con un monto mayor.

Sin embargo, la validez de la tercera condición presenta problemas en la mayoría de las carteras de crédito. Por ejemplo, si una cartera presenta un alto número de incumplimientos en un determinado trimestre, esto puede deberse a que el país este pasando por una recesión económica, por lo tanto, es de esperarse que en el próximo trimestre se presente también un alto número de incumplimientos. La presencia de factores de riesgo, como el del ejemplo anterior, que inciden sobre los créditos provoca que estos no sean independientes unos de otros.

En la siguiente sección se analizará la manera de solucionar el problema que presenta la distribución Poisson al no verificarse la tercera.

MODELO DE RIESGO DE CRÉDITO PARA PORTAFOLIOS CON INDIVIDUOS NO INDEPENDIENTES

Introducción

Estadísticas publicadas (Standard & Poor's 1997) sobre los créditos muestran que hay una gran variabilidad en el número de incumplimientos que suceden año tras año. De acuerdo al modelo Poisson Compuesto, que supone una tasa de quiebra fija $l = m$, la desviación estándar del número de incumplimientos sucedidos año tras año debería ser $\sqrt{\mu}$. Sin embargo, la desviación estándar observada suele ser mucho mayor.

Esto se debe a que las probabilidades de incumplimiento no son constantes periodo a periodo, porque están sujetas a factores de riesgo como la situación económica del país. Por lo tanto, es necesario dejar de lado el supuesto de que las probabilidades de incumplimiento son constantes y emplear probabilidades variables sujetas a diversos factores.

El resto de la sección consiste en analizar los cambios del modelo Poisson Compuesto al suponer que las probabilid ades de incumplimiento y, por tanto, la tasa de quiebra, son variables aleatorias sujetas a *un sólo factor* y que, por lo mismo, puede tomar distintos valores en cada periodo. Posteriormente se generaliza el modelo suponiendo *varios factores*, se analiza su efecto sobre las probabilidades de incumplimiento y la forma de incluirlo en el modelo. Con esta generalización se obtiene el modelo CreditRisk$^+$ (Credit Suisse 1997).

Volatilidad de las probabilidades de incumplimiento.

Aunque existen factores que inciden en las probabilidades de incumplimiento, es muy difícil determinar una relación que indique cómo el incumplimiento de un crédito predispone el incumplimiento de otro. Volviendo al ejemplo de la situación económica, una recesión probablemente provocará un aumento en las probabilidades de incumplimiento, pero el hecho de que cierto crédito incumpla no implica que otro también lo hará.

Por eso, en lugar de estimar las correlaciones existentes entre todos los créditos, lo cual presenta varias desventajas, se propone suponer que las probabilidades de incumplimiento son variables aleatorias sujetas a distintos factores de riesgo. De esta manera, cada crédito A de la cartera tiene una probabilidad de incumplimiento l_A con un valor esperado p_A y una desviación estándar s_A que mide el grado de volatilidad de la probabilidad de incumplimiento.

Bajo el supuesto de que sólo un factor de riesgo afecta las probabilidades de incumplimiento, los cambios de éstas se describen por medio de un factor multiplicativo Q de acuerdo a la siguiente fórmula

$$l_A = p_A \cdot Q. \tag{16}$$

Este multiplicador Q pretende describir los cambios de las probabilidades de incumplimiento provocados por el factor al que están sujetas. Así, al desconocerse el estado futuro del factor de riesgo, el factor multiplicativo Q es una variable aleatoria conocida como la **variable mixta**.

Por comodidad, la relación de las probabilidades de incumplimiento con la variable mixta esta definida de tal manera que las probabilidades son las esperadas siempre y cuando la variable mixta tome el valor de uno; más altas que las esperadas siempre que tome un valor mayor a uno y menor siempre que tome un valor entre cero y uno. Esta variable aleatoria, por construcción, no toma valores negativos. Además, la variable mixta debe tener media uno, con la finalidad de que el valor esperado de las probabilidades de incumplimiento sea efectivamente p_A.

Con esto se tiene que

$$E[l_A] = p_A \quad \text{y} \quad s_A^{\,2} \equiv V(l_A) = p_A^{\,2} \cdot V(Q). \tag{17}$$

Con lo cual resta determinar la varianza de la variable mixta y su efecto sobre el modelo Poisson Compuesto.

Cabe resaltar que por ser un solo factor, las probabilidades de incumplimiento cambian simultáneamente y en el mismo sentido, por lo que no se toma en cuenta la posible diversificación de la cartera.

Volatilidad de la tasa de quiebra

Una de las ventajas de utilizar la distribución Poisson para el número de incumplimientos de la cartera es que únicamente requiere del parámetro m, mismo que representa el número esperado de incumplimientos. Esto bajo el supuesto de que las probabilidades de incumplimiento son constantes en el tiempo y que, por tanto, la tasa de quiebra $l \equiv \sum_A l_A = \sum_A p_A = m$ también lo es.

Ahora, bajo el supuesto de que las probabilidades de incumplimiento están sujetas a un factor de riesgo, la tasa de quiebra es una variable aleatoria con la forma

$$l \equiv \sum_A l_A = \sum_A p_A \cdot Q = m \cdot Q. \tag{18}$$

Se observa que con esta relación el número de incumplimientos esperados sigue siendo el mismo

$$E[l] = m = \sum_A p_A, \tag{19}$$

pero ahora con una desviación estándar $s \equiv \sqrt{V(l)}$ tal que

$$s \equiv \sqrt{V(l)} = \sqrt{m^2 V\left(\tfrac{l}{m}\right)} = \sum_A p_A \cdot \sqrt{V(Q)} = \sum_A s_A \, . \tag{20}$$

Es decir, la desviación estándar de la tasa de quiebra es igual a la suma de las desviaciones estándar de las probabilidades de incumplimiento. Además se tiene que la varianza de la variable mixta mantiene la relación

$$h \equiv V(Q) = \tfrac{s^2}{m^2} \, . \tag{21}$$

De esta manera, bajo este modelo los datos estadísticos observados periodo tras periodo se interpretan como muestras de la variable aleatoria l cuyo valor esperado m representa la tasa esperada de incumplimientos. Y cuya desviación estándar s mide la incertidumbre de que el número esperado de incumplimientos suceda. Por ejemplo, si la media de la tasa de quiebra es de 4% con una desviación estándar del 5%, existe una gran probabilidad de que se experimente una tasa de quiebra del 10% en lugar de la esperada de 4%, con lo cual es muy probable observar el incumplimiento de 11% de los créditos. En cambio con un modelo de tasa de quiebra fija igual al 4%, un evento en el que 11% de los créditos incumplan es mucho menos probable.

En otras palabras, el valor de la tasa de quiebra en un periodo está dado por el estado del factor de riesgo, el cual se trasmite a través de un valor q de la variable mixta Q, de tal forma que la tasa de quiebra para un determinado periodo es $l = m \cdot q$. Utilizando el modelo Poisson se tiene que la distribución condicional del número de incumplimientos dado el valor la variable mixta $p_n(m \cdot q) \equiv \Pr[N = n | Q = q]$ es Poisson con parámetro $m \cdot q$.

En caso de no conocerse el valor de la variable mixta conviene definir su función de distribución $F(Q)$ para determinar las probabilidades del número de incumplimientos como el promedio de las probabilidades condicionales Poisson $p_n(m \cdot q)$ sobre todos los posibles valores de la variable mixta Q

$$p_n = E[p_n(mq)] = \int_0^\infty e^{-mq} \tfrac{mq}{n!} \P F(q) \, . \tag{22}$$

Distribución Pólya

Para obtener una fórmula explícita de las probabilidades de incumplimiento es necesario escoger una distribución apropiada para la variable mixta.

Dicha distribución debe modelar los distintos estados de la tasa de quiebra de acuerdo a los posibles escenarios del factor de riesgo. Sin embargo, la escasa información estadística del comportamiento de los factores de riesgo no permite encontrar una distribución óptima, ni siquiera una que pudiera considerarse "real".

Por ejemplo, el modelo CreditRisk+ supone una distribución Gamma, aunque no existan pruebas de que el factor de riesgo tenga una incidencia de este tipo sobre las probabilidades de incumplimiento y solamente se utiliza porque permite la aplicación del método de recurrencia. En cambio el modelo CreditMetrics supone que la incidencia de los factores sobre las probabilidades de incumplimiento tiene un comportamiento gaussiano (Gordy 2000).

En la presente sección se analiza el caso en que la variable mixta tiene una distribución Gamma.

Cuando se utiliza una distribución Gamma para la variable mixta, la distribución del número de incumplimientos deja de ser Poisson y se transforma en una distribución **binomial negativa**.

El primer paso para obtenerla es determinar los parámetros de la distribución Gamma. Ésta tiene dos, los cuales se pueden determinar de manera que la tasa de quiebra tenga la media m y la desviación estándar σ definidas en la sección anterior (19 y 20).

De esta manera, la distribución de la variable mixta Q, que corresponde a los efectos del factor de riesgo sobre la tasa de quiebra, es $\Gamma\left(h^{-1}, h\right)$, donde Γ denota una distribución Gamma y el parámetro h es el mismo que se definió en la sección anterior y que representa la varianza de la variable mixta (21).

Además, al asignarle dicha distribución Gamma a la variable mixta, la tasa de quiebra $l = m \cdot Q$ sigue a su vez la distribución Gamma $\Gamma\left(h^{-1}, mh\right)$. Con lo cual las nuevas probabilidades del número de incumplimientos en la cartera son

$$p_n = \binom{n + h^{-1} - 1}{n} \cdot (1-q)^{\frac{1}{h}} \cdot q^n \qquad (23)$$

donde $q = \frac{m}{m+h^{-1}} = \frac{s^2}{m+s^2}$.

Esta distribución corresponde a una distribución binomial negativa y se le conoce con el nombre de **Pólya**. Mientras que la distribución Poisson depende únicamente de la media de la tasa de quiebra, la Pólya depende tanto de la media como de la volatilidad, de tal manera que incorpora la volatilidad de la cartera utilizando un mínimo de parámetros. Además, de acuerdo a los momentos de la distribución binomial negativa, el número esperado de incumplimientos en un periodo continua siendo m, mientras que la varianza es ahora

$$s^2 + m \cdot \qquad (24)$$

El parámetro q es una especie de nueva "tasa de quiebra" ya que mientras mayor es su valor las probabilidades de que ocurran más incumplimientos aumentan. Esto ocurre, por ejemplo, cuando la desviación estándar de la cartera aumenta. Por el contrario, se puede demostrar que, en el límite, cuando la varianza de la tasa de quiebra tiende a cero, la distribución del número de incumplimientos es Poisson, lo que es consistente con la obtenida anteriormente.

Proceso Pólya Compuesto

La distribución binomial negativa, al igual que la Poisson, cumple con la condición uno del método de recurrencia, lo que permite obtener la distribución de pérdidas de la cartera de manera sencilla.[v]

La distribución del número de incumplimientos sigue la fórmula recursiva $p_n = \left(a + \frac{b}{n}\right) \cdot p_{n-1}$ para n=1,2,3,.... , donde $a = \frac{m}{m + h^{-1}}$ y $b = \frac{\left(h^{-1} - 1\right) \cdot m}{m + h^{-1}}$, por lo tanto, la fórmula recursiva de las probabilidades de sufrir una pérdida en la cartera de tamaño h x L es

$$A_h = \sum_{j:v_j \le h} \left(\frac{m_j}{m + \frac{m^2}{s^2}} + \frac{\left(1 - \frac{s^2}{m^2}\right) e_j}{\left(1 + \frac{s^2}{m}\right) h} \right) \cdot A_{h-v_j} \qquad \text{para } h = 1,2,.....$$

$$A_0 = \left(\frac{1}{1 + \frac{s^2}{m}} \right)^{\frac{m^2}{s^2}} \tag{25}$$

donde e_j representa la pérdida esperada de la j-ésima banda en unidades de L, matemáticamente $e_j = m_j \cdot v_j$.

En términos de la varianza de la variable mixta la fórmula recursiva es

$$A_h = \sum_{j:v_j \le h} \left(\frac{m_j}{m + h^{-1}} + \frac{(1-h) e_j}{(1 + mh) h} \right) \cdot A_{h-v_j} \qquad \text{para } h = 1,2,.....$$

$$A_0 = \left(\frac{1}{1 + mh} \right)^{\frac{1}{h}} \tag{26}$$

Esta distribución de pérdida, obtenida con la incorporación de la volatilidad de la tasa de quiebra, posee la misma pérdida esperada que la distribución obtenida bajo el supuesto de que la tasa de quiebra es constante, pero con una cola mucho más pesada. Es decir, los percentiles más elevados son mucho más grandes cuando se modela el impacto de la volatilidad de la tasa de quiebra. Con esto las probabilidades de tener pérdidas extremas son mayores.

Cabe destacar que el parámetro h no sólo controla la varianza sino también la curtosis de la variable mixta. Debido a que las probabilidades están en función de ésta (16), la curtosis se transmite a la distribución de pérdidas. Así, cuando el parámetro h es demasiado grande, la curtosis de la distribución de pérdidas resulta ser demasiado grande, induciendo a errores en el cálculo de percentiles de alto grado, entre ellos VaR. Esto porque una curtosis muy elevada en la variable mixta significa que las probabilidades de incumplimiento pueden ser muy grandes, magnificándose el error inducido por la aproximación Poisson. (Gordy 2000.)

Ya que la pérdida esperada es la misma y la cola es mucho más pesada, se concluye que la varianza de la distribución de pérdidas es mayor. Esto se debe a la correlación implícita que guardan los créditos debido que están sujetos a un factor que altera la tasa de quiebra.

En la realidad es común observar que existen varios factores de riesgo que inciden en la tasa de quiebra y no sólo uno. En la siguiente sección se analiza una solución que generaliza el modelo en este sentido y que lleva al modelo CreditRisk$^+$.

CREDITRISK$^+$

La diversificación del riesgo en un portafolio se da de manera natural al tener un gran número de individuos. Aun así, esta diversificación puede ser insuficiente si varios de los elementos de la cartera están correlacionados o, lo que es lo mismo, están fuertemente sujetos a los mismo factores de riesgo, como por ejemplo, aquellos que pertenecen al mismo sector industrial o a la misma zona geográfica.

Asimismo cada crédito puede ser afectado por factores exc lusivos del propio crédito. Por esta razón se clasifican los factores en:

1. **Sistemáticos**- Aquellos que afectan a un grupo de créditos de la cartera.
2. **Específicos o Idiosincrásicos-** Aquello factores que sólo afectan a un crédito de la cartera.

Cuando un factor sistemático afecta a un gran número de créditos, entonces la cartera tiene una alta concentración de riesgo, porque un cambio no deseado en el factor puede provocar el incumplimiento de varios créditos y conllevar a pérdidas extremas.

El modelo Poisson supone que las probabilidades de incumplimiento son constantes y por tanto no considera cambios en la calidad de los créditos. En cambio, el modelo Pólya supone que las probabilidades de incumplimiento están sujetas a un sólo factor, de manera que todos los créditos cambian de calidad conjuntamente. Esto excluye los beneficios de la diversificación que pudiera tener una cartera si los créditos están sujetos a factores mutuamente independientes.

Una solución a este problema es segmentar la cartera en sectores mutuamente independientes y asignar cada crédito a un sector. De esta manera se obtienen varias carteras, cada una con una tasa de quiebra distinta que depende de sólo un factor. Esta no es la mejor solución ya que la probabilidad de incumplimiento de cada crédito depende de más de un factor. Por ello, una mejor solución consiste en asignar una proporción de cada crédito (según la influencia de cada factor sobre el crédito) a segmentos mutuamente independientes, cada uno sujeto a un factor.

A continuación se analiza la incorporación de los factores de riesgo al modelo.

Número de incumplimientos

Al suponer que se tienen segmentos mutuamente independientes, se hace necesario introducir la siguiente notación para cada uno:

Tabla 2-Notación por segmento o sector.

Segmento o Sector	S_k1£k£K
Tasa de quiebra sectorial.	l_k
Media de la tasa de quiebra sectorial.	m_k
Desviación estándar de la tasa de quiebra sectorial	σ_k

Además se define a $w_{A,k}$ como el ponderador que representa el grado de influencia del factor k sobre el crédito A, de tal manera que para todos los créditos se verifica la ecuación

$$\sum_{k=1}^{K} w_{A,k} = 1. \tag{27}$$

El paso clave es suponer que las probabilidades de incumplimiento l_A (y por tanto la tasa de quiebra) dependen de los factores de la siguiente manera

$$l_A = p_A \left(\sum_{k=1}^{K} w_{A,k} \frac{l_k}{m_k} \right) \tag{28}$$

donde, bajo el modelo CreditRisk$^+$, las tasas de quiebra sectorial l_k se distribuyen de acuerdo a una distribución Gamma con media $m_k = \sum_A w_{A,k} p_A$ y desviación estándar $s_k = \sum_A w_{A,k} s_A$.

Al igual que antes, la tasa de quiebra es la suma de las probabilidades de incumplimiento y además se verifica que es igual a la suma de las tasas de quiebra sectorial

$$l \equiv \sum_A l_A = \sum_{k=1}^{K} l_k. \tag{29}$$

A continuación se determinan las funciones de probabilidad del número de incumplimientos y de pérdidas. Para obtenerlas se utiliza la función generadora de probabilidad (*fgp*).

Utilizando la *aproximación Poisson,* se demuestra que el número de incumplimientos de cada *sector* sigue un proceso Pólya con su respectiva tasa de quiebra sectorial. Por lo tanto, como

los segmentos son independientes, se tiene que la función generadora de probabilidad del número de incumplimientos de la cartera es (ver Credit Suisse 1997)

$$F(z)=\prod_{k=1}^{K}F_k(z)=\prod_{k=1}^{K}\left(\frac{1-q_k}{1-q_k z}\right)^{\frac{1}{h_k}} \qquad \text{donde } q_k=\frac{m_k}{m_k+h_k^{-1}}=\frac{s_k^{\,2}}{m_k+s_k^{\,2}} \tag{30}$$

La cual corresponde al producto de las funciones generadoras de probabilidad de K binomiales negativas. Esto demuestra que la distribución del número de incumplimientos de la cartera es equivalente a la suma de procesos Pólya independientes.

Así, mientras que el número esperado de incumplimientos es el mismo que el de los modelos anteriores, la desviación estándar es diferente. Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 3-Comparativo del número de incumplimientos de los tres modelos.

	Poisson	Pólya	CreditRisk+
Número esperado de incumplimientos.	m	m	m
Varianza de la tasa de quiebra.	0	s^2	$\sum_{k=1}^{K} s_k^{\,2}$
Varianza de la distribución del número de incumplimientos.	m	$m+s^2$	$m+\sum_{k=1}^{K} s_k^{\,2}$

Además la relación $m \le m+\sum_{k=1}^{K} s_k^{\,2} \le m+s^2$ muestra que la varianza en el modelo CreditRisk+ esta acotada por la varianza de los modelos Poisson y Pólya. Este resultado es natural, ya que el modelo Poisson considera una tasa de quiebra fija, mientras que el modelo Pólya supone que todos los créditos están sujetos a un sólo factor, por lo cual, cuando el CreditRisk+ incorpora varios factores se toma en cuenta la diversificación de la cartera y por ello la desviación estándar del número de incumplimientos es menor que la del Pólya.

En otras palabras, mientras mayor sea el número de factores entre los que se puede descomponer la variabilidad de las probabilidades de incumplimiento, mayor diversificación se puede obtener. Incluso si el número de factores tiende a infinito, el modelo CreditRisk+ tiende al modelo Poisson Compuesto (diversificación), y por el contrario, si sólo se considera un factor se convierte en un Pólya Compuesto (concentración).

Ahora bien, para considerar el hecho de que existen factores específicos propios de cada crédito que no dependen de los factores sistemáticos, basta incluir un sector extra, el cuál, al no depender de un factor en particular, se modela con un proceso Poisson Compuesto o, equivalentemente, un Pólya con tasa de quiebra sectorial fija.

Distribución de pérdidas

El siguiente paso consiste en obtener la función generadora de probabilidad de las pérdidas de la cartera G, a partir de la del número de incumplimientos. En este caso también se utiliza la discretización de la distribución de montos, de manera que un crédito A puede perder v_A unidades. Así, la probabilidad de que una cartera formada por un sólo crédito A sufra una pérdida de v_A unidades es igual a la probabilidad de que el crédito incumpla, por tanto se verifica la siguiente relación entre la función generadora de probabilidad de pérdida y la de incumplimiento

$$G_A(z \mid l_1, l_2, \ldots l_K) = F_A(z^{v_A} \mid l_1, l_2, \ldots l_K) \cong \exp\left(l_A\left(z^{v_A} - 1\right)\right). \tag{31}$$

A la última relación se le denomina *aproximación Poisson*.

Dadas las tasas de quiebra sectorial los créditos son independientes, por lo tanto

$$G\ (z \mid l_1, l_2, \ldots l_K) = \prod_A G_A(z^{v_A} \mid l_1, l_2, \ldots l_K) \cong \exp\left(\sum_A l_A\left(z^{v_A} - 1\right)\right). \tag{32}$$

Expresión que al integrase sobre todos los posibles valores de las tasas de quiebra sectorial da la siguiente función generadora de probabilidad de las pérdidas de la cartera (ver Credit Suisse 1997).

$$G(z) = \prod_{k=1}^{K} F_k\left(P_k(z)\right) = \prod_{k=1}^{K}\left(\frac{1-q_k}{1-q_k P_k(z)}\right)^{\frac{1}{h_k}} \text{ donde } P_k(z) \equiv \tfrac{1}{m_k}\sum_A w_{A,k}\, p_A z^{v_A} \tag{33}$$

A partir de la cual se puede obtener la distribución de pérdidas mediante la fórmula de recurrencia que se muestra en el manual técnico CreditRisk+ (Apéndice A.10).

En conclusión, el modelo CreditRisk+ consiste en dividir los créditos de la cartera en proporciones y asignarlas a segmentos mutuamente independientes, cada uno influenciado por un factor de riesgo, para modelar cada segmento con un proceso Pólya Compuesto. Con esto la distribución de pérdida del modelo CreditRisk+ tiene la media y varianza (Credit Suisse 1997, A.10) que se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 4-Comparativo de los tres modelos.

	Poisson	Pólya	CreditRisk+
Pérdida esperada.	e	e	e
Varianza de la distribución de pérdidas.	$\sum_A e_A \cdot v_A$	$e \cdot h + \sum_A e_A \cdot v_A$	$\sum_{k=1}^{K} e_k \cdot h_k + \sum_A e_A \cdot v_A$

Donde e_A representa la pérdida esperada del crédito A, y $e = \sum_A e_A$ y $e_k = \sum_A w_{A,k} \cdot e_A$ son las pérdidas esperadas de la cartera y de los segmentos respectivamente.

Puede inferirse que la diversificación está altamente ligada a la cantidad de factores mutuamente independientes entre los que se puede distribuir los créditos y no sólo a la uniformidad de la distribución de montos (granularidad). De hecho un grupo de créditos con montos pequeños altamente correlacionados puede ser más riesgoso que un grupo de grandes montos con bajas correlaciones.

El cociente $\frac{\sum_{k=1}^{K} s_k^{2}}{s^{2}}$ es una medida apropiada para medir el beneficio de la diversificación en factores de riesgo. Así como la medida $\frac{\sum_{k=1}^{K} e_k^{2} h_k}{e^{2} h}$ que además incluye la distribución de los montos.

Es recomendable que los créditos se clasifiquen en grupos que no dependan de los mismos factores de riesgo. En general, la clasificación se hace por industria, región geográfica, producto, etc., cuando se carece de pruebas que confirmen la buena diversificación de dichas clasificaciones.

APLICACIÓN EMPÍRICA DE LOS MODELOS

La presente sección tiene por objeto ilustrar los modelos presentados a lo largo del documento y señalar sus principales diferencias, lo cual permitirá mostrar bajo qué supuestos suele subestimarse o sobrestimarse el riesgo de una misma cartera de créditos. La información utilizada para realizar el ejercicio se presenta en el apéndice del presente trabajo.

El Modelo de Riesgo Individual

El modelo de riesgo individual utilizado corresponde a la aproximación Normal (7). Esta aproximación supone la misma probabilidad de incumplimiento para todos los créditos, misma que se calculó para cada cartera como el promedio de la serie.

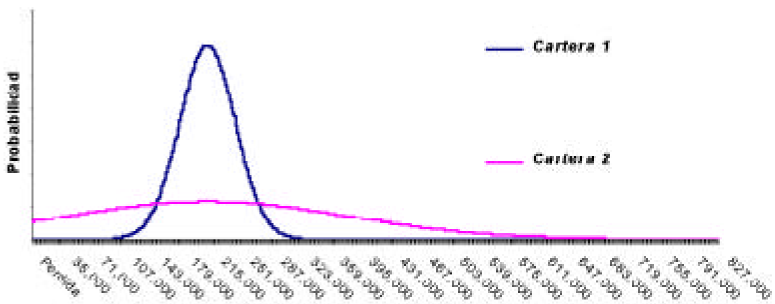
Tabla 5-Resultados del modelo individual, aproximación Normal.

NORMAL	Pérdida esperada	Índice Herfindahl-Hirshman	VaR(.995)	
			Nominal	*Porcentual**
Cartera 1	$211,024	0.22430%	$297,931	11.39%
Cartera 2	$211,024	5.73371%	$650,421	24.86%

*Porcentaje con respecto al monto total de la cartera.

Comparando las carteras, las cuales tienen el mismo monto total y número de créditos, se observa que la cartera dos presenta más granularidad, lo cual resulta en un mayor Valor en Riesgo. Asimismo, en la gráfica 1 se observa que debido a la mayor granularidad la distribución de pérdidas es más dispersa.

Gráfica 1- Distribución Normal: Carteras 1 y 2



Cabe destacar que la distribución de montos es captada, solamente, a través de la suma de los cuadrados de los montos individuales en la varianza de la distribución.

Modelo Poisson Compuesto.

En esta sección se aplica el modelo Poisson Compuesto (15). Para ello se hace el supuesto de que los créditos de una cartera tienen la misma probabilidad de incumplimiento.

Este modelo colectivo necesita como parámetro de entrada la tasa de quiebra. Para estimarla simplemente se multiplica la serie histórica de las probabilidades de incumplimiento por el número de créditos que conforman la cartera, con lo cual se obtiene una serie histórica del número de incumplimientos (ver tabla 6)[vi].

Tabla 6- Serie histórica del número de incumplimientos.

Número de incumplimientos	
Fecha	**Serie 1**
Ene-00	94
Feb-00	54
Mar-00	43
Abr-00	42
May-00	39
Jun-00	36
Jul-00	37
Ago-00	34
Sep-00	36
Oct-00	37
Nov-00	35
Dic-00	34
Ene-01	28
Feb-01	29
Mar-01	27
Promedio	**40.33**
Varianza	**264.667**

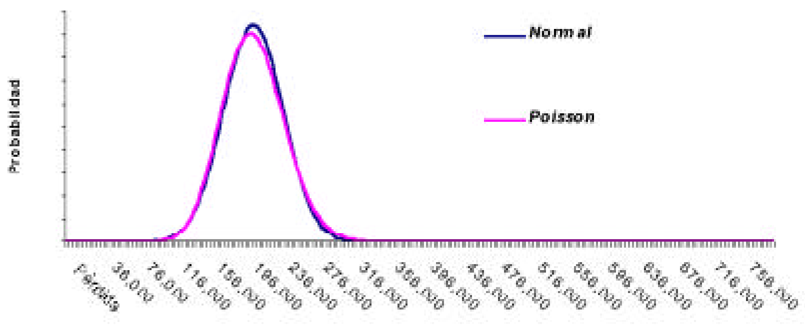
La tasa de quiebra que se utiliza en el modelo se obtiene del promedio histórico del número de incumplimientos. Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 7- Resultados del modelo Poisson Compuesto.

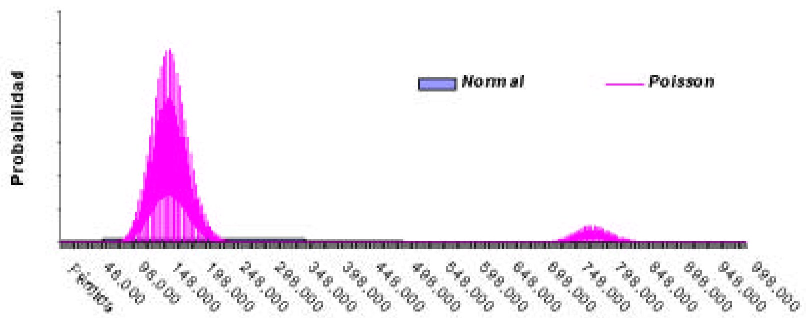
POISSON	Tasa de quiebra	Pérdida esperada	VaR(.995)	
			Nominal	*Porcentual*
Cartera 1	40.33	$ 211,200	$ 308,000	11.77%
Cartera 2	40.33	$ 211,200	$ 832,000	31.80%

En la cartera uno los resultados son muy similares a los obtenidos mediante la aproximación Normal, mas no así en la cartera dos. Esto se debe a que la cartera uno no presenta mucha granularidad, mientras que la presencia de un crédito con un monto grande en la cartera dos provoca que su distribución de pérdidas no sea unimodal y que se aprecie más de una "montaña". Esto debido a los dos posibles eventos del crédito grande: el incumplimiento y el no incumplimiento. El modelo Normal no rescata este hecho, y el Poisson obtiene una buena aproximación siempre y cuando la probabilidad de incumplimiento del crédito grande sea pequeña, de otro modo, se podrán apreciar varias "montañas", ya que la *aproximación Poisson* considera que un crédito puede incumplir más de una vez.

Gráfica 2-Distribuciones de pérdidas de la cartera 1: Normal y Poisson.



Gráfica 3-Distribuciones de pérdidas de la cartera 2: Normal y Poisson.



Otra desventaja del modelo Normal es el supuesto de que la distribución de pérdidas es continua, siendo que a veces, como en el caso de la cartera dos, solamente puede tomar ciertos valores.

Modelo Pólya Compuesto

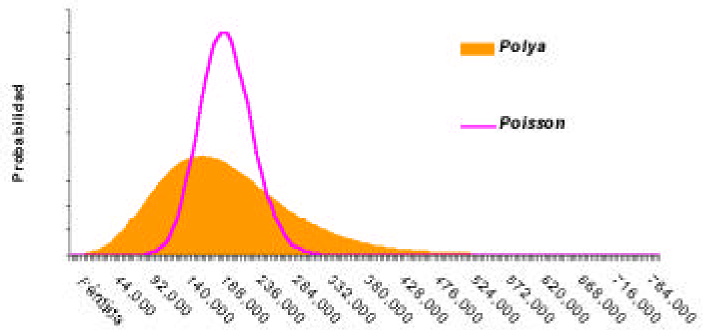
El modelo Pólya Compuesto (25 y 26) incorpora no sólo el valor esperado de la tasa de quiebra, sino también su volatilidad. Como puede apreciarse en las series históricas, la varianza del número de incumplimientos sobrepasa lo permitido por la distribución Poisson. Esta varianza consta de dos partes (24): la del número esperado de incumplimientos y la de la varianza de la tasa de quiebra. Por lo mismo, se puede estimar la volatilidad de la tasa de quiebra simplemente restando a la varianza el promedio del número de incumplimientos. Los resultados se muestran a continuación en la siguiente tabla:

Tabla 8- Resultados del modelo Pólya Compuesto.

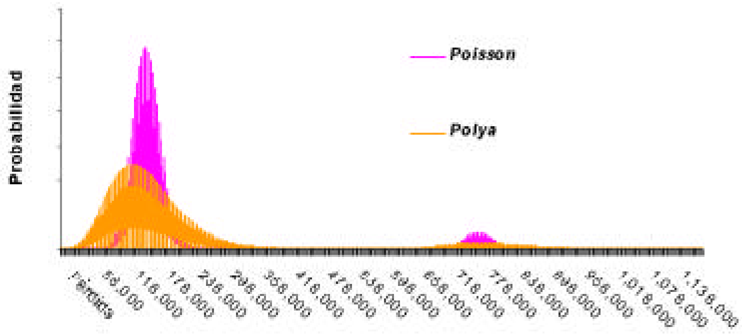
Pólya	Tasa de quiebra	Pérdida esperada	VaR(.995)	
			Nominal	Porcentual
Cartera 1	40.33	$211,200	$491,600	18.79%
Cartera 2	40.33	$211,200	$964,000	36.85%

Como era de esperarse el Valor en Riesgo tuvo un incremento considerable al tomarse en cuenta la volatilidad de la tasa de quiebra.

Gráfica 4- Distribuciones de la cartera 1: Pólya y Poisson Compuesto.



Gráfica 5- Distribuciones de la cartera 2: Pólya y Poisson Compuesto.



Modelo CreditRisk⁺

El modelo CreditRisk$^+$ consiste en una agrupación de segmentos cada uno sujeto a un factor de riesgo distinto e independiente. En está sección se ejemplifica un modelo CreditRisk$^+$ (33) compuesto por dos segmentos: uno idiosincrásico, caracterizado por un modelo Poisson Compuesto, y uno sistemático, caracterizado por un Pólya Compuesto.

Según este modelo los créditos están sujetos a un factor sistemático, pero no al cien por cien, en cuyo caso el modelo se reduciría al Pólya Compuesto, sino que una parte del riesgo corresponde al riesgo específico de cada crédito.

Para estimar los parámetros de este modelo se hace el supuesto de que todos los créditos de la cartera son afectados de igual forma por el factor sistemático. Así, mediante la ecuación (28) y la definición (29) se tiene que

$$l = m\left(\left(1-w\right)+w\cdot Q_2\right) \quad (34)$$

donde Q_2 representa la variable mixta correspondiente al factor sistemático y w el grado de influencia de ésta sobre las probabilidades de incumplimiento.

De aquí se obtiene que la varianza de la tasa de quiebra es

$$V(l)=V(N)-m=m^2w^2h, \quad (35)$$

donde h representa la varianza de la variable mixta Q_2 del factor sistemático.

Es decir, para un valor de h dado se puede determinar el valor de w mediante la fórmula

$$w = \sqrt{\frac{V(N) - m}{m^2 \cdot h}} \,. \tag{36}$$

Sin embargo, al no tenerse información para determinar el valor h o el de w, se optó por presentar los casos en los cuales h=.5, 1[vii]. A continuación se muestran los resultados en las siguientes tablas:

Tabla 9- Resultados del modelo CreditRisk$^+$ con h=.5.

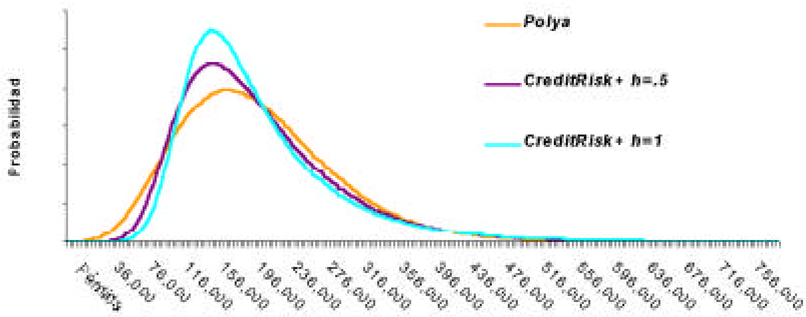
CREDITRISK$^+$ h=.5	Tasa de quiebra	Pérdida esperada	VaR(.995)	
			Nominal	Porcentual
Cartera 1	40.33	$211,200	$532,000	20.34%
Cartera 2	40.33	$211,200	$992,000	37.92%

Tabla 10- Resultados del modelo CreditRisk$^+$ con h=1.

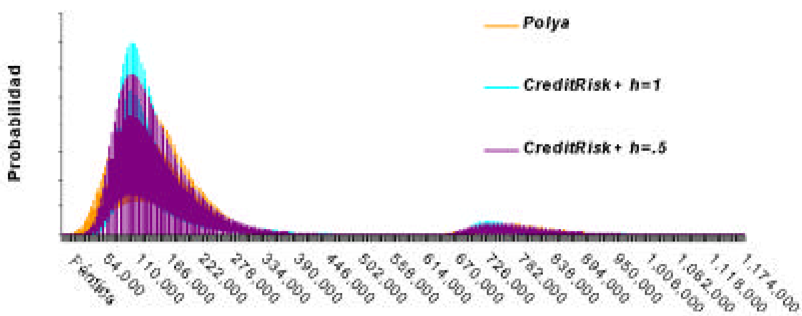
CREDITRISK+ h=1	Tasa de quiebra	Pérdida esperada	VaR(.995)	
			Nominal	Porcentual
Cartera 1	40.33	$211,200	$565,200	21.61%
Cartera 2	40.33	$211,200	$1,012,000	38.69%

Aunque la desviación estándar de la tasa de quiebra es igual en los modelos CreditRisk$^+$ y Pólya, las distribuciones de pérdida tienen distintos Valores en Riesgo. Esto se debe a que el parámetro h controla la curtosis de la distribución de la variable mixta y por tanto la de la distribución de pérdidas. A mayor h la curtosis de la distribución aumenta y con ello los percentiles de alto grado.

Gráfica 6- Distribuciones de la cartera 1: CreditRisk+ y Pólya.



Gráfica 7- Distribuciones de la cartera 2: CreditRisk+ y Pólya.



A continuación se presenta un resumen por cartera de los resultados hasta ahora obtenidos.

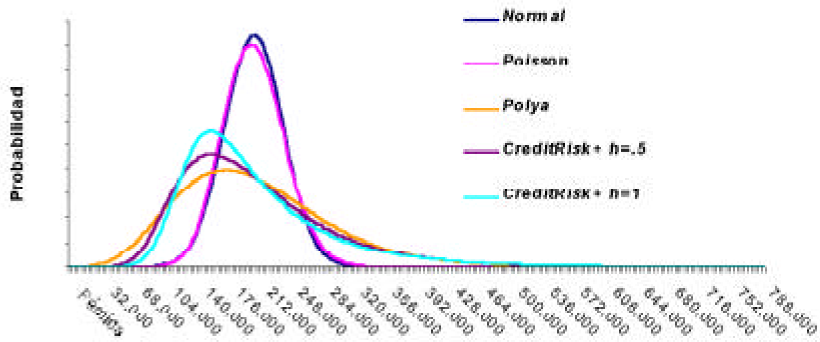
Tabla 11- Resultados de los modelos en la cartera 1.

CARTERA 1	Normal	Poisson	Pólya	CreditRisk + h=.5	CreditRisk + h=1
Tasa de quiebra		40.3	40.3	40.3	40.3
Pérdida esperada	$211,024	$211,200	$211,200	$211,200	$211,200
VaR Nominal	$297,931	$308,000	$491,600	$532,000	$565,200
VaR Porcentual	11.39%	11.77%	18.79%	20.34%	21.61%

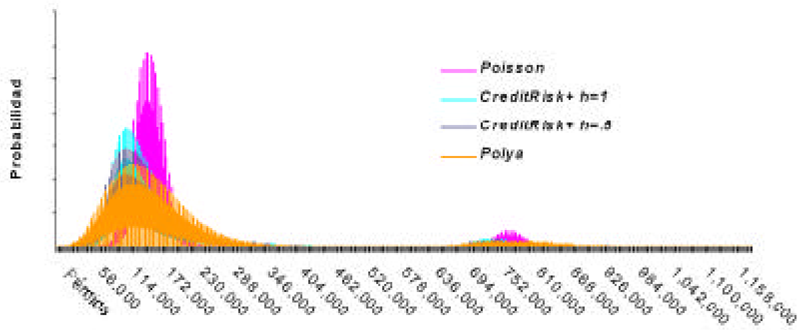
Tabla 12- Resultados de los modelos en la cartera 2.

CARTERA 2	Normal	Poisson	Pólya	CreditRisk + h=.5	CreditRisk + h=1
Tasa de quiebra		40.3	40.3	40.3	40.3
Pérdida esperada	$211,024	$211,200	$211,200	$211,200	$211,200
VaR Nominal	$650,421	$832,000	$964,000	$992,000	$1,012,000
VaR Porcentual	24.86%	31.80%	36.85%	37.92%	38.69%

Gráfica 8- Distribuciones de la cartera 1.



Gráfica 9- Distribuciones de la cartera 2.



CONCLUSIÓN

La teoría de riesgo es útil para atacar el problema de riesgo de crédito. Debido a que el evento de la resolución de un crédito es similar al de un asegurado, se le puede dar un tratamiento estadístico y utilizar el desarrollo de la teoría de riesgo para obtener una distribución de pérdidas de una cartera de crédito.

Las metodologías elaboradas con esta teoría parten de un enfoque de portafolio, el cual permite capturar elementos importantes como la volatilidad de las probabilidades de incumplimiento, y los efectos de granularidad y concentración.

Los supuestos que utilizan los modelos más avanzados de la teoría de riesgo son mínimos. Por un lado, no se requiere de supuestos distribucionales para el tamaño de los montos, mientras que aquellos que se utilizan en la distribución del número de incumplimientos son aplicables a la gran mayoría de las carteras crediticias.

Incluso la teoría de riesgo permite incorporar las correlaciones existentes entre acreditados sin necesidad de calcular éstas directamente, y permite obtener medidas explicitas de la diversificación del riesgo de crédito en una cartera crediticia.

Todo lo anterior permite que los modelos desarrollados bajo esta teoría sean de fácil y sencilla implementación, así como de cálculo rápido, además de que requieren de pocos datos, lo que facilita su implementación en mercados emergentes donde la información es escasa.

APÉNDICE

La información de las carteras que se utiliza está dividida en dos partes: la correspondiente a las probabilidades de incumplimiento y, por otro lado, la de montos.

Para la primera parte se utiliza información mensual de enero de dos mil a marzo de dos mil uno de carteras de crédito del ámbito hipotecario mexicano. Las variables que se recopilan son el número de créditos con cuatro o más mensualidades vencidas en un año y el número de viviendas en cartera. De esta manera, se define para cada mes y cada cartera la probabilidad de incumplimiento a un año como el cociente de ambas variables (Ver tabla 4.13).

Tabla 4.13- Probabilidades de incumplimiento.

PROBABILIDADES DE INCUMPLIMIENTO	
Fecha	**Serie 1**
Ene-00	18.87%
Feb-00	10.73%
Mar-00	8.50%
Abr-00	8.33%
May-00	7.71%
Jun-00	7.18%
Jul-00	7.35%
Ago-00	6.79%
Sep-00	7.26%
Oct-00	7.47%
Nov-00	6.99%
Dic-00	6.78%
Ene-01	5.53%
Feb-01	5.83%
Mar-01	5.37%

Paralelamente, la información acerca de los montos es totalmente hipotética y construida con la finalidad de ilustrar el comportamiento de los modelos bajo distintas características de distribución. Se construyeron dos distribuciones, las cuales tienen el mismo número de acreditados así como el mismo monto, pero distribuidos de manera distinta.

Tabla 4.14- Distribuciones de los montos.

Distribución 1	
Montos	**Núm.de acred.**
$400	5
$1,200	4
$1,600	5
$2,000	6
$2,400	18
$2,800	21
$3,200	18
$4,800	79
$5,200	100
$5,600	128
$6,000	32
$6,400	58
$7,600	20
$15,600	5
$20,400	1
$2,616,000	**500**

Distribución 2	
Montos	**Núm.de acred.**
$4,000	499
$620,000	1
$2,616,000	**500**

Con esta información se construyeron dos carteras hipotéticas la primera con la distribución de montos uno y la segunda con la distribución dos.

BIBLIOGRAFÍA

1. **Altman, E.I., R.G.Haldeman, y P. Narayan**, (1977) *ZETA Analysis: A New Model to Identify Bankruptcy Risk of Corporations*, Journal of Banking and Finance 1:29-54.

2. **Altman, E.I.**, (1989) M*easuring Corporate Bond Mortality and Performance*, Journal of Finance 44 (4): 909-922.

3. **Beard, R.E., Pentikäinen, T. y Pesonen, E.**, (1984) *Risk theory*, 3rd edition, Chapman & Hall, London.

4. **Bowers, N.L., H.U. Gerber, J.C. Hickman, D.A. Jones y C.J. Nesbitt**, (1986) *Actuarial Mathematics*, The Society of Actuaries, Itasca, Illinois.

5. **Bülhlmann, H.**, (1970) *Mathematical methods of risk theory*, Springer Verlag, Heidelberg.

6. **Caouette, John B., Edward I. Altman y Paul Narayanan**, (1998) *Managing Credit Risk: The next great challenge*, Ed John Wiley & Sons, Inc.

7. **Credit Suisse Financial Products** (1997) *CreditRisk+: A Credit Risk Management Framework*, London.

8. **Chorafas, D.N. y H. Steinmann**, (1991) *Expert Systems in Banking: A Guide for Senior Managers*, New York University Press.

9. **Daykin, C.D., T. Pentikäinen, M. Pesonen**, (1994) *Practical Risk Theory for Actuaries*, Chapman & Hall.

10. **De Groot, Morris H.**, (1988) *Probabilidad y Estadística*, Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington Delaware.

11. **Gerber, H.**, (1979) *An introduction to mathematical risk theory*, S.S. Huebner Foundation, University of Pennsylvania, Philadelphia.

12. **Gordy, Micheal B.**, (1998) *A Comparative Anatomy of Credit Risk Models*.

13. **Gupton, Greg M., Christopher C. Finger, Mickey Bhatia**, (1997) *CreditMetrics-Technical Document*, New York: J.P. Morgan & Co. Incorporated. http://www.riskmetrics.com/research/techdoc

14. **Márquez Diez-Canedo, Javier, Calixto López Castañon**, (1999) *Concentration Risk in Bank Loan Portfolio's: Measurement, Single Obligor Limits, and Capital Adequacy*.

15. **McCullagh, P., J.A. Nelder**, (1989) *Generalized Linear Models*, Chapman & Hall.

16. **Panjer, H.,** (1981) *Recursive Evaluation of a Family of Compound Distributions*, ASTIN Bulletin, 12, 22-26.

17. **Shy, Oz.**, (1995) *Industrial Organization: Theory and Applications*, M.I.T. Press.

18. **Standard & Poor's**, (1997) *Standard & Poor's Ratings Performance* 1996.

19. **Tirole, Jean**, (1995) *The Theory of Industrial Organization*, M.I.T. Press.

20. **Trippi, R.R. y E. Turban**, (1996) ed. *Neural Networks in Finance and Investing*, Chicago: Irwin Professional Publishing.

21. **Wilson, Thomas C.**, (1997) *Portfolio Credit Risk*, Risk 10 No. 9 y 10.

22. **Wilson, Thomas C.**, (1998) *Portfolio Credit Risk*, FRBNY Economic Policy Review, October 1998.

---

[i] El Valor en Riesgo o *Value at Risk* (VaR) es una medida de las pérdidas potenciales en el valor de un portafolio en un periodo determinado bajo circunstancias cercanas al peor caso posible.

[ii] Generalmente α suele ser .01%, .05%, 1% o 5%.

[iii] Por eso es conveniente seleccionar un grupo de distribuciones cuya convolución se pueda calcular fácilmente ya sea numérica o algebraicamente.

[iv] Cuando la variable aleatoria cumple con la segunda condición se dice que es una variable compuesta y su distribución una distribución compuesta.

[v] Las otras dos condiciones siguen cumpliéndose dado que corresponden a la distribución del tamaño de los montos.

[vi] En este ejemplo se redondearon las cifras a enteros. Por ello la pérdida esperada del modelo individual difiere un poco de la del resto de los modelos.

[vii] En el manual técnico del CreditRisk$^+$ (Credit Suisse 1997, A7.3) se sugiere que h es aproximadamente uno.