"Un Modelo Para el Tratamiento de Valores Negativos en el Triángulo de Desarrollo Utilizado en la Estimación de Reservas para SONR"

Enrique de Alba, Roberto Bonilla
México

Resumen

La presencia de valores negativos en el triángulo de desarrollo que se construye para la estimación de reservas en el caso de siniestros ocurridos pero no reportados, derivados de la recuperación de siniestros (por salvamentos o participaciones de terceros responsables del daño) y la cancelación total o parcial de reservas de siniestros pendientes de pago (ajustes a la baja por sobre-estimación inicial de la pérdida o por dictámenes finales favorables a la aseguradora en caso de peritajes o litigios donde el asegurado reclama originalmente una cantidad mayor o un siniestro improcedente), complica la elaboración de modelos estadísticos encaminados a la estimación de dichas reservas. El tradicional método de 'chain-ladder' no se ve afectado por esta situación, pero tiene la desventaja de que, por ser determinístico, no permite el cálculo de intervalos de confianza para las reservas, ni para realizar inferencia sobre las mismas, ya que para ello se requieren modelos estocásticos. Existen varios procedimientos para el tratamiento de esta clase de modelos. Por una parte, están los métodos empíricos sencillos de aplicar y, por otra, algunos modelos estadísticos, en su mayoría propuestos por Verrall. En este artículo se revisan métodos existentes y se propone una alternativa. Se comparan los resultados de los diversos métodos mediante la aplicación de los mismos a datos reales, previamente analizados en la literatura, y a través de datos simulados. Finalmente, se propone un modelo alternativo sencillo y de fácil aplicación.

"A Model for the Case When Negative Values are Present in the Development Triangle Used for Estimation of Claims Reserves (IBNR)"

Enrique de Alba , Roberto Bonilla

México

Summary

Claims recovery due to salvage or to the involvement of third party liabilities in the payment of claims, or to partial or total cancellation of reserves for outstanding claims(sucha as a reduction in reserves due to an initial over-estimation of the liability or because of a final tribunal decision favorable to the insurer when there has been legal arbitrage in which the insurer had claimed a larger sum or the claim was denied) can produce negative values in the development triangle used for estimating reserves (IBNR). These negative values complicate the construction and application of statistical models used for this purpose. The traditional 'chain-ladder' method is not affected by negative values. However, it has the disadvantage that is deterministic and hence no probability intervals can be computed for the reserves. More generally, no inference can be made about the estimated reserves. Stochastic models are required to be able to do this. Several procedures are available for the development of this kind of models when negative values are present. Mostly due to Verrall. In this paper we review existing methods and propose a Bayesian alternative. The different methods are compared through their application to real data sets that have previously been analyzed in the literature and to simulated data sets. We propose a simple alternative model, based on Kremer´s original paper.

"Un Modelo Para el Tratamiento de Valores Negativos en el Triángulo de Desarrollo Utilizado en la Estimación de Reservas para SONR"

Enrique de Alba, Roberto Bonilla

México

INTRODUCCION

Una de las funciones más importantes del actuario de daños es el cálculo de las reservas necesarias para cubrir las reclamaciones pendientes. Entre éstas, un rubro muy importante lo constituyen las de siniestros ocurridos pero no reportados (SONR). Por lo mismo, se han desarrollado numeroso métodos para el cálculo de dichas reservas; desde métodos empíricos muy probados y sencillos de aplicar, hasta métodos estocásticos basados en modelos muy complejos: Doray (1996), Kremer (1982), Mack (1993), Norberg (1986,1993), Renshaw y Verrall (1998) y Verrall (1991a, 1991b, 2000). Entre el primer grupo de métodos, con frecuencia se distinguen los que han sido desarrollados por actuarios europeos, de los que han sido desarrollados por actuarios americanos, ver: Esteva Fisher (1994), Elizondo y Guerrero (1994).

Uno de los métodos empíricos más utilizados es el de 'chain-ladder' en sus distintas variantes. Este método es muy sencillo de aplicar y generalmente da buenos resultados. Su principal defecto es que, al no tener una base estadística, no es posible calcular intervalos de confianza para las reservas resultantes. Para la aplicación de los diversos métodos generalmente se presentan los datos en forma de un triángulo: el triángulo de desarrollo, Brown (1993). Estos se presentan como se describe a continuación, en el Cuadro 1.

Cuadro 1

Año de origen	Año de desarrollo 1	2	......	t	...	$n-1$	n
1	X_{11}	X_{12}	...	X_{1t}		$X_{1,n-1}$	X_{1n}
2	X_{21}	X_{22}	...	X_{2t}		$X_{2,n-1}$	-
3	X_{31}	X_{32}	...	X_{3t}		-	
:						-	-
$n-1$	$X_{n-1,1}$	$X_{n-1,2}$				-	-
n	X_{n1}	-					-

En el cuadro anterior se define X_{it} = monto de reclamaciones en el *t-ésimo* año de desarrollo correspondiente al año de origen i, en donde $\{ X_{it}; \quad i=1,...,n \quad t=1,...,n \quad i+t \le n+1 \}$.

La presencia de valores negativos en el triángulo de desarrollo, que se construye para la estimación de reservas en el caso de siniestros ocurridos pero no reportados, complica la elaboración de modelos estadísticos encaminados a la estimación de dichas reservas.

Típicamente dichos valores negativos son consecuencia de la recuperación de siniestros (por salvamentos o participaciones de terceros responsables del daño) y la cancelación total o parcial de reservas de siniestros pendientes de pago (ajustes a la baja por sobre-estimación inicial de la pérdida o por dictámenes finales favorables a la aseguradora en caso de peritajes o litigios donde el asegurado reclama originalmente una cantidad mayor o un siniestro improcedente).

La versión más usada del método 'chain-ladder' utiliza los valores acumulados de las reclamaciones y, por lo mismo, generalmente parece que no le afecta la presencia de valores negativos en el triángulo de desarrollo. El método se puede aplicar, pero habrá que tener cuidado con la interpretación de los resultados. Aún así, como se verá más adelante, hay ocasiones en que también se ve seriamente afectado por ellos. A su vez los modelos estocásticos sí se ven afectados, esencialmente debido a que no se pueden usar logaritmos. Es por esto que ha sido desarrollada una serie de modelos de este tipo explícitamente dirigidos al tratamiento de esta clase de situaciones, Verrall (1991a, 1991b), Renshaw y Verrall (1998) y Mack (1993). Sin embargo, al parecer, en dichos artículos no se toman en cuenta las causas de los valores negativos.

En este artículo se analizan las causas de los valores negativos, así como sus implicaciones contables, financieras y fiscales. Enseguida, se revisan algunos de los métodos existentes para el tratamiento de dichos valores negativos y se considera una alternativa. Se comparan los resultados de los diversos métodos mediante la aplicación de los mismos a datos reales, previamente analizados en la literatura, y a través de datos simulados. Por último, se propone la utilización de un procedimiento sencillo y de fácil aplicación.

CAUSAS DE VALORES NEGATIVOS

A continuación se señalan las causas por las cuales se pueden generar valores negativos y se indican, en cada caso, los ajustes a realizar en la base de datos, con objeto de corregir los valores reportados originalmente y trabajar solamente con valores no-negativos. Generalmente los datos corresponderán a los siniestros individuales, para los que se tiene la información acerca de las causas que generaron el valor negativo. Los ajustes, en consecuencia, también se aplicarán a los siniestros correspondientes, en forma individual.

- **Rechazo de la Reclamación por Improcedencia, Fraude, Dolo o Mala Fe (Cancelación)**. **AJUSTE**: Cancelar el monto original de la reclamación / Eliminar valor negativo.
- **Sobre-Estimación de la Reclamación Original (Ajuste de Menos)**. **AJUSTE**: Sumar al monto original de la reclamación el valor(-) del ajuste (monto final pagado - monto inicial estimado) / Eliminar valor negativo.
- **Adjudicación / Venta de Restos de los Bienes Dañados (Salvamento)**. **AJUSTE**: Sumar al monto original de la reclamación el valor(-) del salvamento / Eliminar valor negativo.
- **Recuperación de la Totalidad o Parte del Siniestro Cubierto, por Acciones Legales Emprendidas por la Aseguradora Contra Terceros Responsables o Culpables del

Mismo (Recuperación). **AJUSTE**: Sumar al monto original de la reclamación el valor(-) de la recuperación / Eliminar valor negativo.

- **Errores de Registro (Cancelación Total o Parcial)**. **AJUSTE**: Sumar al monto original de la reclamación el valor(-) de la cancelación / Eliminar valor negativo.

En el proceso de ajuste es importante tener en cuenta algunas situaciones especiales que pueden presentarse y adecuar la regla de ajuste en consecuencia. A continuación se describen dichas situaciones, indicando las adecuaciones correspondientes.

- **El Valor Negativo Corresponde a un Siniestro Ocurrido con Anterioridad al Periodo de Origen Objeto del Análisis**. **ADECUACION**: Eliminar el valor negativo (De igual forma, tampoco deben considerarse ajustes de más a siniestros ocurridos con anterioridad al período de origen sujeto a análisis).
- **El Valor Negativo Corresponde a un Siniestro Reportado en Tiempo, Sin "Ajustes de Más" Reportados Posteriormente a su Registro**. **ADECUACION**: Afectar el monto original estimado.
- **El Valor Negativo Corresponde a un Siniestro Reportado en Tiempo, con "Ajustes de Más" Reportados Posteriormente a Su Registro**. **ADECUACION**: Afectar primeramente el monto de los ajustes de más, hasta su valor total, iniciando con el más reciente, y así sucesivamente hacia atrás, hasta anular el valor negativo, afectando en última instancia la estimación original.
- **El Valor Negativo Corresponde a un Siniestro No-Reportado en Tiempo, Sin "Ajustes de Más" Reportados Posteriormente a Su Registro**. **ADECUACION**: Afectar el monto original estimado al momento del reporte.
- **El Valor Negativo Corresponde a un Siniestro No-Reportado en Tiempo, con "Ajustes de Más" Reportados Posteriormente a Su Registro**. **ADECUACION**: Afectar primeramente el monto de los ajustes de más, hasta su valor total, iniciando con el más reciente, y así sucesivamente hacia atrás, hasta anular el valor negativo, afectando en última instancia la estimación original.
- **Existen Varios Valores Negativos Asociados al Mismo Siniestro**. **ADECUACION**: Procesar individualmente cada valor negativo, iniciando con el más antiguo, de acuerdo a las reglas anteriores.
- **Se Desconoce la Causa / Origen del Valor Negativo (Regla Generalizada)**. **ADECUACION**: Afectar primeramente el monto de los ajustes de más, hasta su valor total, iniciando con el más reciente, y así sucesivamente hacia atrás, hasta anular el valor negativo, afectando en última instancia la estimación original. En su caso, aplicar el principio de la regla anterior y, al final, eliminar todo valor / saldo negativo remanente.

En el Cuadro 2 se muestra cómo se aplica cada uno de los criterios señalados en los párrafos anteriores, en el caso de que se tenga la información sobre los siniestros individuales; de esta forma se pueden corregir los valores negativos y así aplicar al agregado los procedimientos basados en valores positivos. Claramente se observa que los valores resultantes son no-negativos.

En dicho cuadro, también se muestra la regla de ajuste por prorrateo descrita más adelante en el Modelo de Ajuste Generalizado (MAG).

Cabe señalar que habrá ocasiones en que la información disponible no sea individual, sino agregada para todos los siniestros (triángulo de desarrollo), en cuyo caso el ajuste se realiza sobre éste. Claramente, en este caso habrá que interpretar las causa con cuidado, pues en realidad más bien sería un conjunto de causas diversas, operando sobre uno o más siniestros, las que generen los valores agregados negativos. Sin embargo, los ajustes se aplicarán de la misma manera.

MODELOS DETERMINISTICOS

En esta sección se presentan brevemente algunos de los métodos determinísticos utilizados con mayor frecuencia, en situaciones en las que se presentan valores negativos en el triángulo de desarrollo.

Método 'Chain-Ladder'

El método 'chain-ladder' o de escalera es ampliamente conocido y por lo mismo no se detalla su formulación. Para ello sugerimos a lector alguna de las referencias siguientes: Brown(1993), Goovaerts et. al. (1990) o Hossack et. al. (1999). En este método se utilizan los valores acumulados de las reclamaciones: $Y_{ij} = \sum_{k=1}^{j} X_{ik}$ y se supone que los datos ya han sido ajustados por inflación.

Esencialmente se basa en utilizar la información disponible $\{Y_{ij};\ \ i = 1,\dots,n \quad j = 1,\dots,n \quad i + j \leq n + 1\ \}$ para calcular factores de crecimiento entre períodos de desarrollo, con ellos predecir las reclamaciones futuras y de ahí obtener las reservas. Como típicamente $Y_{ij} > 0$, aunque existan valores negativos de las X_{it}, el método aparentemente no se ve afectado por dichos valores, salvo en los casos en que los valores negativos sean muy grandes o frecuentes.

Método Alternativo Generalizado (MAG)

Este método determinístico alternativo, también es aplicable a cualquier caso o situación, independientemente de la existencia, o no, de valores negativos. Este método coincide en lo esencial con el Método de Bornhuetter-Ferguson, Brown (1993) y, en su caso, distribuye proporcionalmente el ajuste por la presencia de valores negativos. A continuación se le describe utilizando la notación definida en la sección anterior.

Sean:
a) $X_{i,t}$ = Monto de los siniestros ocurridos (originados) en el momento "i" y reportados en el momento "t" (comprende la estimación inicial del siniestro al momento del reporte, así como los ajustes de más y de menos, que se conozcan y reporten posteriormente, hasta el momento "$n-i+1$". Se tiene $i = 1,\ldots,I$ y $t = 1,\ldots,n$, en donde:

n = número máximo de periodos en que se pueden reportar la ocurrencia (o ajuste de siniestros)

I = número máximo de periodos para los que pueden haber ocurrido siniestros, y de los cuáles se cuenta con información en el momento de calcular la reserva.

b) $\Sigma X_{i,t} = \sum_{t=1}^{n-i+1} X_{i,t}$ = Suma algebraica de todos los valores de $X_{i,t}$ correspondientes al año de origen i.

c) $\Sigma X_{i,t\,(+)} = \sum_{t=1}^{n-i+1} X_{i,t(+)}$ = Suma de los valores positivos de $X_{i,t}$ correspondientes al año de origen i.

d) F_i = Factor de ajuste del año de origen i

$$F_i = \Sigma X_{i,t} / \Sigma X_{i,t\,(+)} \quad \text{si} \quad \Sigma X_{i,t} > 0$$
$$F_i = 0 \quad \text{si} \quad \Sigma X_{i,t} < 0.$$

e) $X^*_{i,t}$ = Monto ajustado de los siniestros ocurridos en el momento "i" y reportados en el momento "t" (que son los que finalmente se utilizarán para el análisis de siniestros ocurridos no-reportados).

$$X^*_{i,t} = (F_i)\,(X_{i,t}) \quad \text{si} \quad X_{i,t} > 0$$
$$X^*_{i,t} = 0 \quad \text{si} \quad X_{i,t} < 0\,.$$

Con base en esta notación, el cálculo de las reservas se obtiene de la siguiente manera. Sean:

f) Q_k = Porción estimada del monto total de los siniestros ocurridos que se reportan en el momento de desarrollo "k" con $k = 1,\ldots,n,$. Se cumple la condición

$$\sum_{k=1}^{n} Q_k = 1, \qquad (1)$$

es decir, que el *100%* de las reclamaciones siempre se cubre en un máximo de n periodos de desarrollo. Conviene señalar que los valores de estos parámetros se determinan aplicando alguno de los métodos estadísticos ya conocidos, utilizando como base los valores $X^*_{i,t}$ arriba señalados. Los valores observados de Q_k se calculan como:

$$Q_k = (X^*_{i,k}) \,/\, \Big(\sum_{t=1}^{n} X^*_{i,t}\Big) \quad \text{para} \quad k = 1,2,\ldots,n.$$

Cuadro 2

REGLA DE ULTIMOS REPORTES / PRIMEROS AJUSTES

o/r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	Σ
ant					-500 0					100 0															-400 0
1	110 0									-110 0															0 0
2		120 100							-20 0																100 100
3				130 110			20 0					-40 0													110 110
4					140 140			140 0				-140 0													140 140
5					140 140			140 0				140 0				-140 0				-140 0					140 140
6						150 20			-130 0				180 160					-20 0							180 180
7							800 800	100 100	50 50	25 25	15 15	10 10													1000 1000
8								800 800	100 100	50 50	25 0	15 0	10 0				-50 0								950 950

REGLA DE PRORRATEO DEL METODO ALTERNATIVO GENERALIZADO

3				130 95.3			20 14.7					-40 0													110 110
4					140 70			140 70				-140 0													140 140
5					140 46.7			140 46.7				140 46.7				-140 0				-140 0					140 140
6						150 81.8			-130 0				180 98.2					-20 0							180 180
7							800 800	100 100	50 50	25 25	15 15	10 10													1000 1000
8								800 760	100 95	50 47.5	25 23.8	15 14.3	10 9.5				-50 0								950 950

NOTA: La parte superior de cada renglón indica el valor reportado, y la parte inferior, el valor ajustado.
o = momento de origen (corresponde a la '*i*' de las fórmulas).
r = momento real de reporte = o + t (corresponde a la '*t*' en las fórmulas)

Una forma de estimar Q_k, con base en los valores ajustados no-negativos, cuando aún no se han completado los n periodos de desarrollo, puede ser:

$$Q_k = \frac{\sum_{i=1}^{I-k+1} X^*_{i,k} \,/\, m}{\sum_{t=1}^{n} \sum_{i=1}^{I-t+1} X^*_{i,t} \,/\, m}$$

en donde m = número de valores $X^*_{i,k} > 0$ dentro de la sumatoria.

g) $S_{i,t} = X^+_{i,t}$ = Monto real de los siniestros ocurridos en el momento "*i*" y reportados en el momento "*t*", considerando solamente los valores positivos, con $X^+_{i,t} = max\{0,\ X_{i,t}\}$ y $t = 1,\ldots,n-i+1$.

h) SO_i = Valor estimado de todos los siniestros ocurridos correspondientes al año de origen *i* (valores positivos)

$$SO_i = \{\sum_{k=1}^{n-i+1} S_{i,\,k}\} \,/\, \{\sum_{k=1}^{n-i+k} Q_k\} \ .$$

i) *FA* = Factor de ajuste al monto estimado de siniestros, por la posible ocurrencia de valores negativos. Este valor se podría calcular como la media de los valores F_i mencionados en el punto *d), ó* como un factor global equivalente al cociente:

$$FA = \sum_{i=1}^{I} \sum_{t=1}^{n-i+1} X_{i,t} \,/\, \sum_{i=1}^{I} \sum_{t=1}^{n-i+1} X^+_{i,t}\ , \qquad (2)$$

el cual suele ser un mejor estimador para *FA* que la media de las F_i, cuando se tienen suficientes observaciones (n) para cada año de origen.

j) *RS* = Monto de la reserva para siniestros ocurridos no reportados, que se calcula como sigue:

$$RS = \ \{FA\}\, \{\sum_{i=2}^{I} [\, SO_i * \sum_{k=n-i+2}^{n} Q_k\,]\} \ .$$

MODELOS ESTOCASTICOS

En años recientes, y a partir de la propuesta de Kremer (1982), se ha desarrollado una amplia metodología estadística para la estimación de reservas a partir de triángulos de desarrollo de SONR. En general esto se hace mediante la aplicación de modelos log-lineales a los valores incrementales de las reclamaciones pagadas (reportadas); para ello se requiere que estas sean positivas, ver Verrall (1991a, 1991b), Renshaw y Verrall (1998), Doray (1996), de Alba y Juárez

(2001), Elizondo y Guerrero (1994). En la primera de estas referencias se puede encontrar un resumen sobre el tema. En su planteamiento original Kremer (en Kremer (1982)) demostró que el método "chain-ladder" equivale a la aplicación de un modelo ANOVA de doble clasificación a los logaritmos de las reclamaciones. Aquí se describe cómo estos modelos se aplican ante la presencia de valores negativos.

Modelo Log-normal

En el modelo log-normal se supone que las reclamaciones siguen una distribución de este tipo, es decir los logaritmos de las reclamaciones tienen una distribución normal. Si todos los valores son positivos no hay problema y se puede utilizar una distribución log-normal de dos parámetros y estimarlos con el método de máxima verosimilitud. En su forma más simple consiste en estimar el modelo

$$log(X_{ij}) = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \text{ donde } \varepsilon_{ij} \sim N(0,\sigma^2) \qquad (3)$$

$i = 1,...,k \quad j = 1,...,k \quad i + j \leq k + 1$. Cuando existe al menos un valor negativo típicamente se sigue el siguiente proceso:

a) Elegir una constante suficientemente grande τ.
b) Sumarle dicho valor τ a las reclamaciones incrementales X_{ij} de tal manera que todas sean positivas.
c) Aplicar el modelo lineal de la ecuación (3) a $log(X_{ij} + \tau)$.
d) Con los resultados del modelo estimar las reclamaciones pendientes de pago, y
e) Realizar el pronóstico de las reclamaciones y restarle la constante τ a las estimaciones, para calcular la reserva.

Por otra parte Verrall (1991b) argumenta que el procedimiento anterior es equivalente a utilizar la distribución log-normal de 3 parámetros. La práctica usual consiste en escoger este valor de manera arbitraria lo cual puede sesgar los resultados.

Para evitar los sesgos, afirma Verrall (1991b), es preciso utilizar una distribución log-normal de tres parámetros pero ahora también estimando la constante τ mediante el método de máxima verosimilitud. Cabe mencionar que la estimación de dicha constante presenta problemas de tipo numérico y es muy inestable, en el sentido de que la región en que se alcanza el máximo de la función verosimilitud es muy 'plana'. Ilustra su aplicación utilizando datos del mercado de seguros de Londres, Cuadro 3.

Un Modelo Chain-ladder Estocástico

Renshaw y Verrall (1998) presentan un modelo estocástico que corresponde al 'chain-ladder' y es de la siguiente forma: utilizando las definiciones anteriores de los valores de reclamaciones 'incrementales' X_{ij}, con $\{(i,j): i=1,2,...,n; j=1,2,...,n\}$, hacen la distinción entre el triángulo de desarrollo y el triángulo objetivo; este último corresponde a los valores de las reclamaciones por estimar, es decir cuando $i+j > t+1$. Con esto se define el modelo 'chain-ladder' estocástico como un modelo lineal generalizado (GLM) en el que las X_{ij} se modelan como respuestas independientes con media $m_{ij} = E(X_{ij})$, función de varianza $V(m_{ij}) = m_{ij}$ y parámetro de escala $\phi > 0$, en combinación con el 'link' de predicción $\log(m_{ij}) = \log(e_i) + \mu + \alpha_i + \beta_j$.

Los estimadores de los parámetros, $\hat{\mu}, \hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_j$, se obtienen con el método de cuasi-verosimilitud y las reclamaciones pendientes se obtienen a partir de

$$\hat{m}_{ij} = e_i \exp(\hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j).$$

En estas expresiones la e_i corresponde a los expuestos; la cual puede ser una cantidad relacionada con el año-accidente y que se puede utilizar para introducir una medida del volumen del negocio, como el ingreso por primas, y de esta manera estandarizar.

Renshaw y Verrall sugieren que cuando existen valores negativos incrementales de las reclamaciones se utilicen los residuales de Pearson en el GLM y dan otras sugerencias para llevar a cabo el proceso de estimación. Este se puede hacer utilizando alguno de los programas existentes como el GLIM o S+. Presentan un ejemplo, utilizando datos propuestos originalmente por Mack (1994). Los datos y su estimación de la reserva se presentan en el Cuadro 2. Su estimación de la reserva es de $52,135. Los parámetros se estiman mediante un método de cuasi-verosimilitud y suponiendo que los datos siguen una distribución Poisson. Este último supuesto es un tanto irreal dado que se están estimando valores que no son discretos. En todo caso tiene sentido si lo que se desea estimar es el número de reclamaciones y no sus montos.

Modelo de Verrall

En Verrall (1991a) el autor presenta un modelo de tipo Bayesiano en el que supone que todos los datos tienen una distribución Poisson, aunque reconoce que no es realista debido a que requiere que todos los valores sean positivos. Sin embargo afirma que se puede relajar esta restricción. Supone que los datos consisten de un triángulo de reclamaciones incrementales $\{X_{ij} : j=1,...,n-i+1; i=1,...n\}$, los valores de las reclamaciones acumuladas se definen como: $Y_{ij} = \sum_{k=1}^{j} X_{ik}$ y los factores de desarrollo del método 'chain-ladder' se denotan por $\{\lambda_j : j=2,...,n\}$.

Desarrolla un modelo recursivo en el que las reclamaciones X_{ij} tienen una distribución condicional $X_{ij} \mid X_{i1}, X_{i2},..., X_{i,j-1}$ con media y varianza $(\lambda_j - 1)Y_{i,j-1}$ y $\lambda_j(\lambda_j - 1)Y_{i,j-1}$, respectivamente. Asimismo la media y la varianza de $Y_{ij} \mid X_{i1}, X_{i2},..., X_{i,j-1}$ son $\lambda_j Y_{i,j-1}$ y $\lambda_j(\lambda_j - 1)Y_{i,j-1}$, respectivamente.

Cuadro 3

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	5012	3257	2638	898	1734	2642	1828	599	54	172
2	106	4179	1111	5270	3116	1817	-103	673	535	
3	3410	5582	4881	2268	2594	3479	649	603		
4	5655	5900	4211	5500	2159	2658	984			
5	1092	8473	6271	6333	3786	225				
6	1513	4932	5257	1233	2917					
7	557	3463	6926	1368						
8	1351	5596	6165							
9	3133	2262								
10	2063									

Fuente: Mack (1994)

Cuadro 4

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	290,089	266,666	314,364	468,721	264,735	269,916	125,922	540,684	120,757	58,963	50,837	151,645
2	401,574	648,101	673,897	656,985	458,421	373,010	31,541	279,066	98,551	177,200	-422,178	
3	251,430	373,741	1,827,086	-429,298	801,041	746,157	109,788	212,418	101,225	-3,883		
4	48,924	213,108	644,118	248,680	1,202,333	311,357	1,067,149	697,658	650,711			
5	62,782	278,404	880,618	611,843	243,380	335,226	205,508	164,632				
6	10,684	109,837	189,684	581,492	69,177	323,129	207,976					
7	271,613	290,244	587,769	660,187	681,626	413,425						
8	151,219	183,554	485,830	431,524	427,587							
9	97,658	141,952	369,009	450,971								
10	51,843	119,089	530,706									
11	145,703	421,333										
12	21,019											

Fuente: Verrall (1991b)

Cuando hay valores negativos propone utilizar un modelo, por ejemplo normal, que tenga la misma media y en el que se conserve lo más posible la varianza la cual se esperaría que sea proporcional a Y_{ij}. Lo anterior resulta en que $Y_{ij} \mid X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{i,j-1}$ es aproximadamente normal con media $\lambda_j Y_{i,j-1}$ y varianza $\phi_j Y_{i,j-1}$. Esto es equivalente al modelo de Mack (1993) quien lo consideraba un modelo no-paramétrico. Verrall (1991a) también propone un modelo no recursivo que puede utilizarse para incorporar valores negativos; en este caso X_{ij} se aproxima con una distribución normal, con media y varianza $\frac{Y_{i,n-i+1} Q_j}{\sum_{k=1}^{n-i+1} Q_k}$ y $\phi_j Y_{i,n-i+1}$, respectivamente.

Se puede afirmar, con respecto a este modelo, que la utilización del supuesto de normalidad es irreal, ya que existe amplia evidencia de que la distribución de montos de reclamaciones no es simétrica. Además afirma (página 98) que estos modelos incorporan n nuevos parámetros (las ϕ_j) que se deberán estimar a partir de los datos,

Cuadro 5

Comparación de Resultados. Datos de Mack (1994)					
Fila	MAG-1	Chain-ladder	Log-Normal	GLM	O.Faltante
2	130	154	4	154	153
3	500	617	1,006	617	484
4	1,389	1,636	2,710	1,636	1,604
5	2,923	2,747	2,652	2,747	2,008
6	3,873	3,649	3,164	3,649	3,300
7	5,744	5,435	3,794	5,435	4,284
8	11,375	10,907	10,350	10,907	10,195
9	11,187	10,650	11,242	10,650	13,004
10	17,135	16,339	19,111	16,339	23,717
TOTAL	54,257	52,135	54,032	52,135	58,750
*FA =	0.9969				0.9994

MAG-1 = Método Alternativo Generalizado aplicando regla de últimos reportes / primeros ajustes para el único valor negativo reportado.

Cuadro 6

Comparación de Resultados. Datos de Verrall (1991b)					
Fila	MAG-2	Chain-ladder	Log-Normal	GLM	O.Faltante
2	155,391	184,720	193,396	184,720	185,913
3	246,114	(21,405)	(12,061)	(21,405)	306,927
4	443,743	87,020	532,171	87,020	473,254
5	450,152	238,643	157,646	238,643	408,801
6	514,465	328,846	(92,416)	328,846	319,098
7	1,405,824	1,052,768	1,373,008	1,052,768	1,248,633
8	1,255,005	1,027,397	939,318	1,027,397	1,191,910
9	1,250,961	1,206,533	1,034,681	1,206,533	1,184,983
10	1,578,014	1,347,809	1,067,784	1,347,809	1,270,170
11	2,452,199	3,616,144	3,368,769	3,616,144	4,078,328
12	189,105	398,872	1,375,010	398,872	557,668
TOTAL	9,940,973	9,467,347	9,937,308	9,467,347	10,875,718
*FA =	0.9342				0.9688

MAG-2 = Método Alternativo Generalizado aplicando regla de últimos / reportes primeros ajustes o regla de prorrateo, según el caso, a los valores negativos reportados.

pero que ese debe ser el precio a pagar por estimar las reservas en la presencia de valores negativos. Son modelos complejos que atacan los valores negativos, pero hacen caso omiso de sus causas. No presenta ejemplos de aplicación del método, el cual puede resultar de difícil aplicación. No obstante es de esperar que, igual que el Chain-ladder estocástico, se generen valores negativos en algunas celdas para las que se obtienen las estimaciones.

EJEMPLOS Y COMPARACION DE LOS METODOS

En esta sección, se presentan dos juegos de datos en forma de triángulo de desarrollo que contienen valores negativos, Cuadro 3 y Cuadro 4. Estos han sido ampliamente analizados por diversos métodos. El Cuadro 3 está tomado de Mack (1994) y los datos del Cuadro 4 provienen de Verrall (1991b). Si se desea estimar y obtener intervalos de confianza, una opción es considerar las celdas con valores negativos como 'valores faltantes', estimar el modelo log-lineal sin ellos y posteriormente ajustar con un factor de ajuste del tipo FA de la ecuación (2).

En los Cuadros 5 y 6 se presentan los resultados de aplicar cada uno de los distintos métodos a los dos juegos de datos. En el Cuadro 5, Mack (1994), se observa que los resultados del chain-ladder tradicional y el estocástico, la columna con encabezado GLM, son idénticos, tal como sería de esperarse. El resultado de aplicar el modelo log-normal y el de ajuste generalizado son muy semejantes, mientras que el que se estimó con el modelo log-lineal, pero considerando el valor negativo (-130) como un "valor faltante", es considerablemente más alto. La ventaja de utilizar este método es que se podrían calcular la varianza del estimado de las reservas, lo cual también se puede hacer con el log-normal y el GLM.
Por su parte el Cuadro 6 muestra los resultados correspondientes a los datos de Verrall (1991b). Cabe señalar que los resultados del chain-ladder tradicional y estocástico nuevamente son iguales entre sí. Por su parte, los resultados del modelo log-normal y el de ajuste generalizado son muy parecidos entre sí, mientras que el que se obtiene utilizando el criterio de "valores faltantes" nuevamente resulta muy por encima de los demás. En este cuadro se puede observar también que tanto las dos versiones del chain-ladder como el log-normal producen, en alguna de las filas, estimaciones negativas de las reservas. Este resultado es totalmente inaceptable; no tiene sentido. Esto nos lleva a concluir que los métodos que producen resultados razonables son el de ajuste generalizado (determinístico) y el de "valores faltantes" (estocástico). Mientras que el valor del primero es esencialmente consistente con los demás, el último es mayor. Habría que evaluar la diferencia entre ellos con el objeto de determinar el más adecuado.

CONCLUSIONES

Al estimar reservas para siniestros ocurridos y no reportados en datos que contengan valores incrementales negativos, es esencial considerar las causas que pueden haber generado dichos valores. De preferencia la información que se utilice debería ser la que corresponda a siniestros individuales, la cual normalmente debe estar disponible en las compañías aseguradoras. Con base en la información relativa a dichas causas, se deben ajustar los valores negativos, siguiendo alguno de los criterios que se mencionan en este documento, de tal manera que queden únicamente valores no-negativos. Con base en éstos se deberá proceder a la aplicación de cualquiera de los métodos tradicionales. En caso de que sólo se cuente con información agregada, los ajustes se harán de manera análoga.

No tienen sentido los resultados que señalan valores negativos en las reservas estimadas para cualquier periodo en el triángulo de desarrollo, por lo que los métodos que producen este tipo de resultados deben ser cuestionados. Los resultados que se han presentado en este documento, indican que más bien lo que debe hacerse es corregir los datos para asegurar que ya no existen valores negativos y posteriormente aplicar los métodos. Si lo que se desea es tener la posibilidad de hacer inferencia estadística, es preciso utilizar alguno de los métodos estocásticos. El efecto de los valores negativos dependerá de su frecuencia y de su magnitud relativa a los demás datos.

El análisis y la interpretación de los resultados es muy importante ya que una sobre-estimación de los valores negativos implica necesariamente una sub-estimación de la reserva para SONOR, lo cual, a su vez, eleva artificialmente las utilidades del año. Al registrarse una utilidad mayor a la real, se reparte un mayor dividendo a los accionistas, los empleados reciben una mayor participación en las utilidades y se pagan más impuestos.

BIBLIOGRAFIA

(1) de Alba, E. (1988), Pronóstico Bayesiano de Agregados en Procesos Estacionales Estables, *Revista de Estadística*, Vol. II(4), 1-6, INEGI, México.

(2) de Alba, E. and M. Juárez (2001), Bayesian Estimation of Outstanding Claims Reserves, *Research Report 01-01, Institute for Insurance and Pension Research*, The University of Waterloo .

(3) de Alba, E. and Mendoza, M. (1996), Discrete Bayesian Models for Forecasting with Stable Seasonal Patterns, *Advances in Econometrics*, Vol. 11, Part B., 267-281.

(4) Brown, R. L. (1993), *Introduction to Ratemaking and Loss Reserving for Property and Casualty Insurance*, ACTEX Publications.

(5) Doray, L.G. (1996), UMVUE of the IBNR reserve in a lognormal linear regression model, *Insurance: Mathematics and Economics 18*, 43-57, Elsevier Science B.V.

(6) Elizondo F., A. y Guerrero, V.M. (1994), Métodos de Pronóstico de Siniestralidad Ocurrida pero no Reportada, Documento de Trabajo DEA-C94-9, ITAM

(7) Esteva Fisher, E. (1994), Reserva de Siniestros Ocurridos Pero No Reportados, Documento de Trabajo Núm. 26, Comisión Nacional de Seguros y Fianzas

(8) Goovaerts, M.J., Kaas, R., van Heerwaarden, A.E. and Bauwelinckx, T. (1990), *Effective Actuarial Methods*, North-Holland, Amsterdam

(9) Hossack, I.B., Pollard, J.H. and Zenwirth, B. (1999), *Introductory Statistics with Applications in General Insurance*, 2nd. Ed., U. Press, Cambridge

(10) Kremer, (1982), IBNR claims and the two-way model of ANOVA*, Scandinavian Actuarial Journal*, 47-55

(11) Mack, T. (1993), Distribution-Free calculation of the standard error of chain ladder reserve structure, ASTIN Bulletin 23, 213-225

(12) Mack, T. (1994), Which Stochastic Model is Underlying the Chain Ladder Method?, *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 15, 133-138.

(13) Norberg, R. (1986), A Contribution to Modelling of IBNR Claims, *Scandinavian Actuarial Journal*, 155-203

(14) Norberg, R. (1993), Prediction of Outstanding Liabilities in Non-Life Insurance, *ASTIN Bulletin* 23(1), 96-115.

(15) Renshaw, A.E. and R. Verrall (1998), A stochastic model underlying the chain-ladder technique, *British Acturial Journal* 4,(IV) 905-923.

(16) Taylor, G.C. (1986), *Claim Reserving in Non-Life Insurance,* Elsevier Science Publishers, New York

(17) Verrall, R. (1991a), On the estimation of reserves from loglinear models, *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 10, 75-80

(18) Verrall, R. (1991b), Negative Incremental Claims: Chain ladder and their Models, *Journal of the Institute of Actuaries* 120(I), 171-183

(19) Verrall, R. (2000), An investigation into stochastic claims reserving models and the chain-ladder technique, *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 26, 91-99