

**TRATAMIENTO DE VALORES
NEGATIVOS EN EL TRIÁNGULO DE
DESARROLLO UTILIZADO EN LA
ESTIMACIÓN DE RESERVAS PARA SONR
(IBNR)**

Enrique de Alba y Roberto Bonilla

ITAM

**A New Millennium.
A New Challenge for Actuaries**

OBJETIVO GENERAL

Proponer una alternativa para el tratamiento de valores negativos en el triángulo de desarrollo utilizado en la estimación de reservas para SONR (IBNR)

INTRODUCCIÓN

La presencia de valores negativos en el triángulo de desarrollo complica la aplicación de los métodos estadísticos tradicionales y puede distorsionar la estimación de la reserva.

RESUMEN

- Se analizan causas de los valores negativos.
- Se revisan métodos existentes y se considera uno alternativo.
- Se comparan y analizan los resultados de los diferentes métodos.
- Se propone la utilización de un procedimiento sencillo y de fácil aplicación.

CAUSAS DE LOS VALORES NEGATIVOS

- Rechazo de reclamación por improcedencia, fraude, dolo o mala fe (cancelación).
- Sobre-estimación de reclamación original (ajuste de menos).
- Adjudicación/Venta de restos de bienes dañados (salvamento).
- Recuperación de totalidad o parte de siniestro cubierto.
- Errores de Registro (cancelación total o parcial).

MÉTODO ALTERNATIVO

En esencia, consiste en reconstruir los valores originales del siniestro, considerando los ajustes posteriores, para trabajar únicamente con valores positivos y estimar un factor de ajuste para reflejar el impacto de los valores negativos.

VALORES NEGATIVOS CAUSA AJUSTE

Cancelación por
rechazo

Cancelar monto original
de reclamación

Sobre-estimación de
reclamación

Salvamento

Recuperación

Cancelación por
error de registro

Sumar a la reclamación
original el valor (-) del
monto correspondiente

MODELOS

- DETERMINÍSTICOS
 - Método “Chain-Ladder”
 - Método Alternativo Generalizado (MAG)
- ESTOCÁSTICOS
 - Modelo Log-normal
 - Modelo Log-lineal con Valores Faltantes
 - Modelo Chain-Ladder Estocástico
 - Modelo de Verrall (Poisson)

MÉTODO “CHAIN-LADDER”

Información disponible (Y_{ij})



Factores de crecimiento (λ_s)



Reclamaciones futuras

donde:

$$Y_{ij} = \sum_{k=1}^j X_{ik},$$

$Y_{ij}; i=1, \dots, n \quad j=1, \dots, n \quad i+j \leq n+1$

$$\lambda_s = \frac{\sum_{i=1}^{n-s+1} Y_{is}}{\sum_{i=1}^{n-s+1} Y_{is-1}}$$

MÉTODO ALTERNATIVO GENERALIZADO (MAG)

$$RS = \{FA\} \{ \sum_{i=1}^I [SO_i * \sum_{k=n-i+2}^n Q_k] \}$$

donde:

RS= monto de la reserva para SONR

FA= factor de ajuste para valores negativos

$$FA = \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^{n-i+1} X_{i,t} / \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^{n-i+1} X_{i,t}^+$$

SO_i = valor estimado de siniestro ocurridos correspondiente al año de origen i (valores positivos)

$$SO_i = \{ \sum_{k=1}^{n-i+1} S_{i,k} \} / \{ \sum_{k=1}^{n-i+1} Q_k \}$$

$S_{i,t} = X_{i,t}^+$ = monto real de siniestro ocurridos en “i” y reportados en “t”, considerando positivos.

$$X_{i,t}^+ = \max \{ 0, X_{i,t} \} \text{ y } t = 1, \dots, n-i+1$$

Q_k = Proporción estimada del monto total de siniestro ocurridos que se reportan en momento de desarrollo “k” con $k=1,...,n$, $\sum_{k=1}^n Q_k=1$

$$Q_k = (X_{i,k}^*) / (\sum_{t=1}^n X_{i,t}^*) \quad \text{para } k=1,2,...,n$$

donde:

$X_{i,t}^*$ = monto ajustado de siniestros ocurridos en “i” y reportados en “t”

$$X_{i,t}^* = (F_i) (X_{i,t}) \quad \text{si } X_{i,t} > 0$$

$$X_{i,t}^* = 0 \quad \text{si } X_{i,t} < 0$$

F_i = Factor de ajuste del año de origen i

$$F_i = \sum X_{i,t} / \sum X_{i,t (+)} \quad \text{si } \sum X_{i,t} > 0$$

$$F_i = 0 \quad \text{si } \sum X_{i,t} < 0$$

$$\sum X_{i,t (+)} = \sum_{t=1}^{n-i+1} X_{i,t (+)} \quad \text{y} \quad \sum X_{i,t} = \sum_{t=1}^{n-i+1} X_{i,t}$$

$X_{i,t}$ = monto de siniestros ocurridos en “i” y reportados en “t”
(comprende estimación inicial, ajustes de más y de menos conocidos hasta $n-i+1$). Se tiene $i = 1, \dots, I$ y $t = 1, \dots, n$.

donde:

n = número máximo de periodos en que se pueden reportar la ocurrencia (o ajuste de siniestros).

I = número máximo de periodos para los que pueden haber ocurrido siniestros, y de los cuales se cuenta con información en el momento de calcular la reserva.

Otra forma de calcular Q_k es:

$$Q_k = \frac{\sum_{i=1}^{I-k+1} X_{i,k}^* / m}{\sum_{t=1}^n \sum_{i=1}^{I-t+1} X_{i,t}^* / m}$$

En donde m = número de valores $X_{i,t}^* > 0$ dentro de la sumatoria

MODELO LOG-NORMAL

Supone reclamaciones se distribuyen log-normal.

- Todos valores positivos (dos parámetros):
 $\log(X_{ij}) = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$; donde $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$
- Al menos un valor negativo (tres parámetros):
 - Elegir constante suficientemente grande τ .
 - Sumar τ a reclamaciones X_{ij} hasta todas positivas.
 - Aplicar modelo a $\log(X_{ij} + \tau)$.
 - Con resultados estimar reclamaciones pendientes de pago.
 - Realizar pronóstico reclamaciones y restar τ a estimaciones para calcular reserva.

NOTA: Para evitar sesgo utilizar distribución log-normal de tres parámetros estimando τ mediante método de máxima verosimilitud.

MODELO LOG-LINEAL

Supone reclamaciones se distribuyen log-normal.

- Todos valores positivos (dos parámetros):

$$\log(X_{ij}) = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}; \text{ donde } \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$$

- Al menos un valor negativo
 - Eliminar valores negativos
 - Considerarlos como observaciones faltantes.
 - Con resultados estimar reclamaciones pendientes de pago.
 - Realizar pronóstico reclamaciones y restar τ a estimaciones para calcular reserva.

MODELO CHAIN-LADDER ESTOCÁSTICO (GLM)

Utiliza X_{ij} con $\{i=1,2,\dots,n; j=1,2,\dots,n\}$

Triángulo de desarrollo $\neq$ Triángulo objetivo

(valores de las reclamaciones
por estimar, $i+j > t+1$)

X_{ij} independientes, media $m_{ij} = E(X_{ij})$, función de varianza
 $v(m_{ij}) = m_{ij}$, y parámetro de escala $\phi > 0$ en combinación con:

$$\text{Log}(m_{ij}) = \log(e_i) + \mu + \alpha_i + \beta_j$$

Estimadores de parámetros μ', α', β' se obtienen con cuasi-verosimilitud.

Reclamaciones pendientes a partir de: $m'_{ij} = e_i \exp(\mu' + \alpha'_i + \beta'_j)$.

donde:

e_i = número de expuestos.

MODELO DE VERRALL

Modelo tipo Bayesiano.

Supone datos se distribuyen Poisson.

Triángulo se compone de reclamaciones incrementales

X_{ij} con $\{j=1,...,n-i+1; i=1,...,n\}$

Y_{ij} = Reclamaciones acumuladas

$Y_{ij} = \sum_{k=1}^j X_{ik},$

Factores de desarrollo método “Chain-Ladder” :

$\{\lambda_j ; j=2,...,n\}$

Valores positivos:

Desarrolla modelo recursivo:

Distribución condicional X_{ij} y Y_{ij} :

$X_{ij} | X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ij-1}$; media $(\lambda_j - 1) Y_{i,j-1}$
varianza $\lambda_j(\lambda_j - 1) Y_{i,j-1}$

$Y_{ij} | X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ij-1}$; media $\lambda_j Y_{i,j-1}$
varianza $\lambda_j(\lambda_j - 1) Y_{i,j-1}$

Valores negativos:

Propone modelo normal con igual media $(\lambda_j Y_{i,j-1})$
varianza semejante, proporcional a Y_{ij} ($\emptyset_j Y_{i,j-1}$)

Nota: similar al modelo de Mack.

Modelo no-recursivo:

X_{ij} distribución normal; media $Y_{i,n-i+1} Q_j / \sum_{k=1}^{n-i+1} Q_k$
varianza $\emptyset_j Y_{i,n-i+1}$

Nota: Incorpora n nuevos parámetros (las $\emptyset_j$)

Datos de Mack										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	5012	3257	2638	898	1734	2642	1828	599	54	172
2	106	4179	1111	5270	3116	1817	-103	673	535	
3	3410	5582	4881	2268	2594	3479	649	603		
4	5655	5900	4211	5500	2159	2658	984			
5	1092	8473	9271	6333	3786	225				
6	1513	4932	5257	1233	2917					
7	557	3463	6926	1368						
8	1351	5596	6165							
9	3133	2262								
10	2063									

Comparación de Resultados. Datos de Mack (1994)					
Fila	MAG-1	Chain-Ladder	Log-normal	GLM	O. Faltante
2	130	154	4	154	153
3	500	617	1,006	617	484
4	1,389	1,636	2,710	1,636	1,604
5	2,923	2,747	2,652	2,747	2,008
6	3,873	3,649	3,164	3,649	3,300
7	5,744	5,435	3,794	5,435	4,284
8	11,375	10,907	10,350	10,907	10,195
9	11,187	10,650	11,242	10,650	13,004
10	17,135	16,339	19,111	16,339	23,717
TOTAL	54,256	52,134	54,033	52,134	58,749
*FA=	0.9969				0.9994

Datos de Verrall

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	290,089	266,666	314,364	468,721	264,735	269,916	125,922	540,684	120,757	58,963	50,837	151,645
2	401,574	648,101	673,897	656,985	458,421	373,010	31,541	279,066	98,551	177,200	-422,178	
3	251,430	373,741	1,827,086	-429,298	801,041	746,157	109,788	212,418	101,225	-3,883		
4	48,924	213,108	644,118	248,680	1,202,333	311,357	1,067,149	697,658	650,711			
5	62,782	278,404	880,618	611,843	243,380	335,226	205,508	164,632				
6	10,684	109,837	189,684	581,492	69,177	323,129	207,976					
7	271,613	290,244	587,769	660,187	681,626	413,425						
8	151,219	183,554	485,830	431,524	427,587							
9	97,658	141,952	369,009	450,971								
10	51,843	119,089	530,706									
11	145,703	421,333										
12	21,019											

Comparación de Resultados. Datos de Verrall (1991b)					
Fila	MAG-2	Chain-Ladder	Log-normal	GLM	O. Faltante
2	155,391	184,720	193,396	184,720	185,913
3	246,114	-21,405	-12,061	-21,405	306,927
4	443,743	87,020	532,171	87,020	473,254
5	450,152	238,643	157,646	238,643	408,801
6	514,465	328,846	-92,416	328,846	319,098
7	1,405,824	1,052,768	1,373,008	1,052,768	1,248,633
8	1,255,005	1,027,397	939,318	1,027,397	1,191,910
9	1,250,961	1,206,533	1,034,681	1,206,533	1,184,983
10	1,578,014	1,347,809	1,067,784	1,347,809	1,270,170
11	2,452,199	3,616,144	3,368,769	3,616,144	4,078,328
12	189,105	398,872	1,375,010	398,872	557,668
TOTAL	9,940,973	9,467,347	9,937,306	9,467,347	11,225,685
				TOTAL*FA=	10,875,718
*FA=	0.9342				0.9688

RESULTADOS

- Resultados chain-ladder tradicional y estocástico iguales.
- Log-normal y ajuste generalizado semejantes.
- Log-lineal tomando valores negativos como faltantes, considerablemente más alto.
- Resultados razonables con “ajuste generalizado” y “valores faltantes” porque siempre dan reservas positivas.

CONCLUSIONES

- Esencial considerar causas de valores negativos.
- Preferible información de siniestros individuales.
- Primero ajustar datos y luego aplicar métodos estadísticos.
- Sobre-estimación valores(-) $\Rightarrow$ sub-estimación reservas $\Rightarrow$ aumento utilidad anual $\Rightarrow$ más dividendos, mayor reparto utilidades y más impuestos.