

Risikotheorie der Höchstschadenrückversicherung

Erhard Kremer
Bundesrepublik Deutschland

1 Einleitung

Heutzutage ist die Rückversicherungsmathematik eines der größten Teilgebiete der Mathematischen Risikotheorie. In ihr wurden alle in der Praxis vorkommenden Verträge inzwischen intensiv mathematisch untersucht. Dabei waren von besonderer Bedeutung die Effizienzuntersuchung und die Prämientheorie.

Zunächst befaßte man sich überwiegend mit den klassischen Verträgen Quote, Stoploss und Schadenexzedent. Erst in den letzten 20 Jahren wurden stärker auch die etwas exotischeren Höchstschaden- und ECOMOR-Verträge untersucht. Dies vor allem vom Autor dieses Surveys, der gut 15 Arbeiten zu diesen Verträgen publizieren konnte. Nach anfänglichen spezielleren Arbeiten zu den „Exoten“ erkannte der Autor Mitte der 80er, daß es eleganter ist, allgemeinere Resultate für eine Verallgemeinerung beider Verträge herzuleiten. Aus dieser Erkenntnis entwickelte sich im Laufe der Jahre eine umfangreiche Theorie über sogenannte verallgemeinerte Höchstschadenrückversicherungsverträge. Da die dazugehörigen Publikationen breit gestreut über verschiedene Fachzeitschriften sind, entschloß sich der Autor zum vorliegenden Survey. Die Publikation im Tagungsband des ICA lag nahe, da damit die Akutaren aller Länder sich über die genannte perfekte Theorie informieren können. Die Theorie schließt eine der letzten größeren Lücken der Rückversicherungsmathematik. Der Autor möchte eingangs noch darauf hinweisen, daß die behandelten Verträge bislang in der Praxis praktisch ohne große Bedeutung waren, wenngleich sie durchaus sinnvoll und praktisch denkbar sind.

Die überblickartig gebrachte Theorie gliedert sich auf in drei Teile und zwar in

- a) Theorie der Prämie
- b) Theorie des Gesamtschadens
- c) Theorie der Effizienz

In jedem Teil werden recht allgemeine Resultate für die allgemeine Vertragsform gebracht und diese dann meist kurz am Beispiel des klassischen Höchstschadenrückversicherungsvertrages illustriert. Es wird sich daher auf das Wesentlichste beschränkt. Zahlreiche weiterführende oder mehr exemplarische Literaturstellen sind im Text passend eingearbeitet. Die Literaturliste am Ende der Arbeit dürfte praktisch alles Publierte zum behandelten Kontext enthalten. Möglicherweise inspiriert der Survey jüngere Aktuarien, sich etwas näher mit der Theorie zu befassen und vielleicht sogar einen eigenen Beitrag dazu zu verfassen.

2 Die Verträge

Bezeichne N die Schadenanzahl eines Kollektivs von Risiken. Die dazugehörigen Schadenhöhen seien $X_1, X_2, X_3, \dots$ und diese in nichtwachsender Größe angeordnet

$$X_{N:1} \geq X_{N:2} \geq \dots \geq X_{N:N} .$$

Gegeben seien Koeffizienten $c_1, c_2, c_3, \dots$ derart, dass für alle $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^n c_i y_i \in \left[0, \sum_{i=1}^n y_i \right] .$$

Interpretiert man die Zufallsvariable

$$R_N = \sum_{i=1}^N c_i \cdot X_{n:i}$$

als Schadenlast eines Rückversicherers, so definiert die Familie $(c_i, i \geq 1)$ einen Rückversicherungsvertrag. Dieser sei verallgemeinerter **Höchstschaden**

denrückversicherungsvertrag genannt (Symbol: GLCR). Der Name erklärt sich dadurch, dass für die spezielle Wahl

$$\begin{aligned} c_1 &= c_2 = \dots = c_p = 1 \\ c_j &= 0 \quad \forall j > p \end{aligned}$$

der (klassische) **Höchstschadenbetrag (=LCR)**, bei dem der Rückversicherer die p größten Schäden übernimmt, resultiert. Als weiteres Beispiel erhält man den **ECOMOR-Vertrag** durch die Wahl

$$\begin{aligned} c_1 &= c_2 = \dots = c_{p-1} = 1 \\ c_p &= 1 - p \quad c_j = 0 \quad \forall j > p . \end{aligned}$$

Als erste Arbeiten zu diesen Beispielen seien genannt Ammeter (1964), Thépant (1950)). Den allgemeinen GLCR findet man wohl erstmals (so ähnlich wie ebenda) in Kremer (1984a), (1984b), (1985).

Der GLCR läßt sich noch verallgemeinern und zwar zu sogenannten **Rückversicherungsvertrag basierend auf geordneten Schäden** durch Wahl einer Familie $(f_i, i \geq 1)$ von Funktionen $f_i : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ derart, daß

$$f_i(0) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n f_i(y_i) \in \left[0, \sum_{i=1}^n y_i \right]$$

für alle $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Die Schadenlast des Rückversicherers wäre damit

$$(2.1) \quad R_N = \sum_{i=1}^N f_i(X_{N:i}) .$$

Bei den praktischen Beispielen dazu hat man

$$(2.2) \quad f_i(x) = c_i \cdot h(x)$$

mit einer geeigneten Funktion h . Für $h(x) = x$ resultiert der obige **GLCR**. Für die Wahl

$$\begin{aligned} c_i &= 1, \quad \forall i \\ h(x) &= \max(x - P, 0) \end{aligned}$$

erhält man den (klassischen) **Schadenexzedentenvertrag** mit Priorität $P \geq 0$ (kurz: $XL(P)$).

Die für fast alles Folgende zugrunde gelegten Voraussetzungen sind:

(A.1) die Schadenzahl N ist unabhängig von den Schadenhöhen $X_1, X_2, X_3, \dots$,

(A.2) die Schadenhöhen X_i sind identisch verteilt auf $(0, \infty)$ mit Verteilungsfunktion F , Mittelwert μ und Varianz σ^2 .

Meist hat man noch:

(A.3) die Schadenhöhen $X_i, i = 1, 2, \dots$ sind unabhängig.

Soweit zur zugrundeliegenden Notation.

3 Prämien

Bekanntlich hat man sich ja auch intensiv in der Risikothorie mit Prinzipien der Prämienkalkulation befaßt (s. etwa De Vylder (1984)). Für die eben definierten Verträge erscheint das Standardabweichungsprinzip als besonders geeignet (s. auch Reich (1985)), womit man als **Risikoprämie** wählt

$$\Pi = m + \lambda \cdot s$$

mit der **Nettoprämie**

$$m = E(R_N) ,$$

der Standardabweichung

$$s = (Var(R_N))^{1/2}$$

und dem Loading-Faktor $\lambda > 0$. Letzterer sei nun als gegeben angenommen, es interessieren damit nur noch m und s^2 . Zur Bestimmung dieser beiden gibt es praktisch 4 verschiedene Techniken

Direkte Methode

Vorausgesetzt seien (A.1)-(A.3). Benötigt wird die erzeugende Funktion von N

$$M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Prob(N = n) \cdot t^n$$

und deren i -te Ableitung $M^{(i)}(t)$. Ferner sei

$$\Gamma(i) = (i - 1)! .$$

Man hat dann (s. Kremer (1985), (2000b))

Theorem 1

Für die Nettoprämie des GLCR gilt

$$\text{a) } m = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{c_i}{\Gamma(i)} \right) \cdot \int_0^1 F^{-1}(u) \cdot (1 - u)^{i-1} M^{(i)}(u) du$$

mit der Pseudoinversen

$$F^{-1}(u) = \inf \{x : F(x) \geq u\},$$

sofern F stetig ist.

$$\text{b) } m = \sum_{i=1}^{\infty} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} [Prob(N \geq i) \Gamma(i) - H_{F(n)}(i)]$$

mit der Funktion

$$H_p(i) = \int_0^p (1 - u)^{i-1} M(i)(u) du ,$$

sofern F diskret auf $\mathbb{N}_0$ ist. □

Korollar 1

- i) Im Fall a) des Theorems sei zusätzlich N **Poisson-verteilt** mit Parameter $\lambda > 0$, d.h.

$$Prob(N = n) = \left(\frac{\lambda^n}{n!} \right) \cdot \exp(-\lambda), \quad u = 0, 1, 2, \dots$$

und X_i **Pareto-verteilt** mit Parameter $\alpha > 1$ und Startwert $a > 0$, d.h.

$$F(X) = 1 - a^\alpha \cdot x^{-\alpha} \quad \text{für } x \geq a.$$

Dann gilt

$$(3.1) \quad m = \lambda^{1/\alpha} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{c_i}{\Gamma(i)} \right) \cdot \Gamma_{\lambda}(i - 1/\alpha) \cdot a$$

mit der unvollständigen Gammafunktion

$$\Gamma_{\lambda}(t) = \int_0^{\lambda} s^{t-1} \exp(-s) ds.$$

ii) Im Fall b) des Theorems sei zusätzlich N Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Dann gilt

$$m = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{c_i}{\Gamma(i)} \right) \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_{\lambda_n}(i) \right]$$

mit

$$\Lambda_n = \lambda \cdot (1 - F(n)). \quad \square$$

Die analogen Ergebnisse für s^2 findet man in Kremer (1985), (2000b)).

Für größeres λ wird man in (3.1) natürlich Γ_{λ} durch die vollständige Gammafunktion $\Gamma = \Gamma_{\infty}$ ersetzen. Für den Spezialfall des (klassischen) **LCR** liefert dann (3.1) das frühe Resultat von Ammeter (1964):

$$m \approx \lambda^{1/\alpha} \cdot \frac{\Gamma(p + 1 - 1/\alpha)}{\Gamma(p)} \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1} \right) \cdot a$$

Eine handliche Formel für m bei exponential-verteilten Schadenhöhen findet man in Kremer (1986b). Andere Sonderfälle sind in Kremer (1989), (1998a), (1998b) behandelt. Weitere Resultate zu Negativbinomial- und binomial-verteilten Schadenzahlen werden in Berglund (1998) hergeleitet.

Bounding Methode

Es seien (A.1)-(A.2) angenommen. In Kremer (1988) findet man

Theorem 2

Es gilt für den GLCR

$$m \leq E(N \cdot \bar{c}_N) \cdot \mu + [E(N \cdot (N - 1) \cdot s_N^2)]^{1/2} \cdot \sigma$$

wobei

$$\begin{aligned}\bar{c}_N &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N c_i \\ s_N^2 &= \left(\frac{1}{N-1} \right) \cdot \sum_{i=1}^{N-1} (c_i - \bar{c}_N)^2 .\end{aligned}\quad \square$$

Diese Prämien-schranke erweist sich oft als zu grob. Schärfere Ergebnisse liefert

Theorem 3

Ferner gilt

$$m \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{c_i}{i} \right) \cdot \left[\sum_{n=i}^{\infty} n \cdot \text{Prob}(N = n) \cdot \rho(P_{in}) \right] \cdot \mu + \sum_{i=1}^{\infty} c_i \cdot \left(\sum_{n=i}^{\infty} \text{Prob}(N = n) \cdot P_{in} \right)$$

mit

$$\rho(P) = \frac{1}{\mu} \cdot \int_P^{\infty} (x - P) F(dx) \quad (\text{Prämienrate des } XL(P)).$$

und

$$P_{in} = F^{-1}(1 - (i/n)). \square$$

Korollar 4

Nimmt man zusätzlich an, dass F Pareto-verteilt mit Parameter $\alpha > 1$ und Startwert $a > 0$ ist, so vereinfacht sich die obere Schranke des Theorems 3 zu

$$(3.2) \quad E(N^{1/\alpha}) \cdot \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{c_i}{i^{1/\alpha}} \right) \right] \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1} \right) \cdot a - \rho$$