

## **"Asset Liability Management und Produktdesign in der deutschen Lebensversicherung"**

Michael Pannenberg, Volker Stieglitz  
Germany

### **Zusammenfassung**

Die Arbeit liefert Antworten auf die Frage, welche Auswirkungen die Wahl der strategischen Asset Allocation im Rahmen des Asset Liability Managements auf die Produktgestaltung deutscher Lebensversicherungen hat. Dabei werden ein bewusst einfaches Kapitalanlagemodell sowie ein vereinfachtes Sparplanmodell entwickelt, die auch für Nicht-Aktuare verständlich sind und dennoch die wesentlichen Auswirkungen qualitativ und quantitativ verdeutlichen, und auf wesentliche Elemente der Produktgestaltung angewendet. Insbesondere werden Argumente für die These vorgebracht, dass die Abbildung der Chancen und Risiken der Kapitalanlagen ein ganz wesentlicher aber häufig vernachlässigter Aspekt der Ausgestaltung der Gewinnbeteiligung als "Natürliche Gewinnbeteiligung" ist.

## **"Asset Liability Management and Product Design in German Life Assurance"**

Michael Pannenberg, Volker Stieglitz  
Germany

### **Synopsis**

Which impact does the choice of a defined strategic asset allocation in the context of an Asset Liability Management have on the design of life assurance products? The paper gives some answers to this question for German with - profit life assurance products. It uses an elementary Markowitz-type portfolio model for the assets and a simplified savings plan model for the liabilities. Because of their simplicity, the models may be discussed without any effort with non-actuaries and nevertheless demonstrate the basic effects in a qualitatively and quantitatively appropriate way. In particular, it is argued that incorporating the promises and risks of the assets in product design is an important but often neglected task in the construction of a "natural" profit sharing system.

## **Asset Liability Management und Produktdesign in der deutschen Lebensversicherung**

Dr. Michael Pannenberg, Dr. Volker Stieglitz

### **1. Einleitung**

#### *1.1 Historische Niedrigzinsen und volatile Aktien*

Der Kapitalmarkt ist in den letzten Jahren aus Anlegersicht der deutschen Lebensversicherer vor allem durch zwei Effekte charakterisiert:

- Die Zinsen von festverzinslichen Wertpapieren, Hypotheken und Darlehen befinden sich auf historisch niedrigem Niveau.
- Aktien und verwandte Anlageformen brachten hohe Erträge bei hoher, teilweise noch steigender Volatilität.

Als Folge dieser Entwicklung sinken derzeit die von Lebensversicherern erzielten ordentlichen Erträge aus Zinszahlungen (laufende Durchschnittsverzinsung, korrigiert um die aus Spezialfonds ausgeschütteten außerordentlichen Erträge) auf Werte, die deutlich unterhalb dessen liegen, was Kunden erwarten und der Wettbewerb, auch mit anderen Anlageformen, fordert. Als Konsequenz erhöhten viele Unternehmen in den letzten Jahren die Quote an Aktien und verwandten Anlageformen, sei es in der Direktanlage, sei es in Spezialfonds. Dies führte zu einer Kapitalanlagepolitik, die sich – für einige Unternehmen langsam, für manche Unternehmen fast abrupt – auf jeden Fall aber stetig und konsequent von der konservativen Linie vergangener Jahre abwendet und die aufsichtsrechtlich maximal zulässigen Quoten renditestarker aber sehr volatiler Anlagen, vor allem Aktien und Fonds, tendentiell ausschöpft. Die stärker ins allgemeine Bewusstsein gerückten Ertragsmöglichkeiten, aber auch Risiken von Aktien und verwandten Anlageformen führen gleichzeitig zu Gestaltungsformen der Altersvorsorge, die diese Chancen bei angestrebter Kontrolle der Risiken stärker nützen wollen als bisher (Pensionsfonds, Altersvorsorgesondervermögen).

#### *1.2 Asset Liability Management in der Lebensversicherung*

Diese Entwicklung blieb nicht ohne Folgen. Die Schere zwischen ordentlichen Erträgen aus Zinszahlungen und der durch verstärkte Realisierung außerordentlicher Erträge auf hohem Niveau gehaltenen Nettoverzinsung klafft immer weiter auseinander. Um trotz volatiler Aktienmärkte die Nettoverzinsung in einer Höhe halten zu können, die nicht zur Absenkung der Gewinnbeteiligung zwingt, sind hohe Bewertungsreserven und deren angemessene Steuerung unter Berücksichtigung der Erfordernisse der versicherungstechnischen Verpflichtungen zwingend erforderlich. Wie auf dem amerikanischen Markt – als Antwort auf kapitalmarktbedingte Unternehmenszusammenbrüche – und auf dem britischen Markt – als Antwort auf die Entwicklung fondsgebundener Versicherungen mit Kapitalgarantien – steigt auch auf dem deutschen Markt das Interesse an Methoden des Asset Liability Managements, getriggert primär durch die steigende Abhängigkeit der Nettoverzinsung von außerordentlichen Erträgen und sekundär durch die Publikationspflichten von großen Teilen der Bewertungsreserven auch in der HGB-Bilanz und verstärkte Anforderungen an das

Risikomanagement z.B. durch KonTraG und den deutschen Rechnungslegungs - Standard DRS 5-20 ([DRS]).

Methoden einer die Kapitalanlagen und die versicherungstechnischen Verpflichtungen simultan berücksichtigenden Unternehmenssteuerung und deren Umsetzung in ein DV-System werden viel diskutiert, sind aber von einem marktbreiten Einsatz und Verständnis und vor allem von der Umsetzung der Ergebnisse noch relativ weit entfernt.

Einfache, weniger aufwändig umzusetzende aber wirkungsvolle Ansätze wie ein Stress Test (z.B. der GDV Stress Test vom Dezember 1999, vgl. [GDV]) werden dagegen häufig nur wenig beachtet und angewendet, im Gegensatz zum amerikanischen Markt – wo die oben beschriebene Situation zur Entwicklung des Risk Based Capital Ansatzes führte – und zum britischen Markt – wo ein Stress Test unter der Bezeichnung Resilience Test aus Sicht der Versicherungsaufsicht mandatorisch ist. Dies mag sich in der Zukunft ändern, vor allem weil manche Unternehmen mangels ausreichender Kapitalausstattung bereits vom Kapitalmarkt zu teilweise drastischen Reduktionen ihrer Verpflichtungen durch Senkung der Gewinnbeteiligung und sogar Verzicht auf eine Vorausdeklaration gezwungen wurden.

Noch weniger berücksichtigt – weil weniger im Bewusstsein und erst mittelfristig in der Wirkung – wird die drastische Veränderung der Kapitalanlage und die gestiegenen Anforderungen an das Risikokapital bei der Gestaltung von Lebensversicherungsprodukten. Dabei bieten sich gerade hier Möglichkeiten, mittelfristig Unternehmensrisiken zu verringern und effektiv Sicherheitsmittel zur Verfügung zu stellen. Nach unserer Auffassung sollten daher bereits bei der Gestaltung der Lebensversicherungsprodukte systematisch die Chancen und Risiken der Kapitalanlage in angemessenem Umfang berücksichtigt werden. Damit dies gelingt, ist ein einfaches Modell der gegenseitigen Abhängigkeiten von Assets und Liabilities erforderlich – so einfach, dass es in angemessener Form in die Produktgestaltung eingehen kann, aber gleichzeitig so aussagekräftig, dass die Hauptstellhebel bewegt und die gesteckten Ziele erreicht werden können. Hierzu will die vorliegende Arbeit vor allem einen Beitrag leisten.

### *1.3 Rechnungsgrundlage Zins*

Provokativ formuliert: In der Tradition kapitalbildender Produkte der deutschen Lebensversicherung ist der Zins einerseits die wichtigste, andererseits aber sicherlich nicht die am besten untersuchte Rechnungsgrundlage. Der sich abzeichnende mittelfristige Übergang auf eine mehr an Marktwerten orientierte Bilanzierung und der durch die massiven Änderungen der Anlagepolitik ausgelöste Druck auf das Risikomanagement und die Produktgestaltung wird dieses Missverhältnis zwangsläufig ändern. Einen Eindruck von den aktuellen Diskussionen hierzu vermitteln z.B. [AGP], [DRS] und [GDV].

Die hier vorgestellten elementaren Ansätze zu einer Beurteilung der Rechnungsgrundlage Zins in Abhängigkeit von der strategischen Asset Allocation passen durchaus in den Methodenkanon der Beurteilung anderer Rechnungsgrundlagen, wie z.B. für die biometrischen Rechnungsgrundlagen in [JQ] und [PS] beschrieben.

### *1.4 Asset Liability Management und Natürliche Gewinnbeteiligung*

Der beschriebene Ansatz einer expliziten Berücksichtigung der Chancen und Risiken der Kapitalanlage bei der Gestaltung von Lebensversicherungsprodukten lässt sich noch auf eine

zweite Art begründen und motivieren: Wir glauben, dass die möglichst kongruente Umsetzung von Chancen und Risiken der Kapitalanlage in die versicherungstechnische Ausgestaltung und die Deklaration der Gewinnbeteiligung für kapitalbildende Versicherungen der bei weitem wichtigste, aber bisher eher vernachlässigte Aspekt einer *Natürlichen Gewinnbeteiligung* im klassischen Sinn ist: Natürliche Zinsgewinnbeteiligung ist in diesem Sinn ein die Anforderungen der Assets auf natürliche Weise berücksichtigendes Liability Management.

Ohne eine Formaldefinition anzustreben, gehen wir davon aus, dass die Forderung nach verursachungs- und entstehungsgerechter, zeitnaher Gewinnbeteiligung das wichtigste konstitutive Element einer Natürlichen Gewinnbeteiligung in ihrer historisch in regulierter Zeit von der Aufsicht geforderten und nachfolgend auch vom deregulierten deutschen Lebensversicherungsmarkt praktizierten Form ist.

#### *1.4.1 Wahl des Zinsträgers*

Bezogen auf das Asset Liability Management heisst das bisher vor allem, dass die Zinserträge als bei weitem wichtigste Gewinnquelle in Prozent eines Zinsträgers definiert werden, der modellmäßig den vom Kunden stammenden Teil der Kapitalanlagen repräsentieren soll und dementsprechend in der Regel einer zeitnah berechneten „Prämienreserve“ unter Berücksichtigung der Gewinnbeteiligung entspricht. Vom Modellansatz her entspricht das einem Deckungskapital zweiter Ordnung, das aus praktischen Gründen durch das Deckungskapital der Stammversicherung zuzüglich des Deckungskapitals gutgeschriebener Bonusleistungen dargestellt wird, die beide vollständig mit den Rechnungsgrundlagen (Zins, Kosten und Biometrie) der Prämienberechnung ermittelt werden. Auf dem Hintergrund der Transparenzanforderungen in Folge einer zunehmend schärferen Interpretation des AGBG gehen wir davon aus, dass diese Deckungskapitalien zeitnah zum Ende des Vorjahrs / Anfang des aktuellen Jahrs anzusetzen sind, sofern dieser auf dem Hintergrund der Verzinsungspraxis der Banken zu Recht existierenden Vorerwartung des Kunden nicht eine sehr klar formulierte bedingungsgemäße Vereinbarung einer abweichenden, insbesondere weiter zurückhängenden Wahl des Zinsträgers gegenübersteht.

#### *1.4.2 Beteiligung an den Kapitalerträgen statt Zinsgewinnbeteiligung*

Die eingangs beschriebenen Änderungen in der Kapitalanlage führen dazu, dass ein immer größerer und immer wichtiger werdender Anteil der Kapitalerträge auf außerordentlichen Erträgen, hauptsächlich basierend auf Handelsgewinnen und Auflösungen von Bewertungsreserven, beruht – unabhängig davon, ob diese aus der Direktanlage stammen oder über Spezialfonds ausgeschüttet und damit unter HGB zu ordentlichen Erträgen werden. Die Einnahmen auf der Aktivseite beruhen also nicht mehr fast ausschließlich auf „Zinsen“, sondern hängen vermehrt von „Kapitalerträgen“ jeglicher Art ab.

Weiterhin führt die Veröffentlichungspflicht für Teile der Bewertungsreserven im Anhang der HGB – Bilanz und die zunehmend mehr ins Bewusstsein rückende Rolle der Bewertungsreserven (auch der nicht publizierten stillen Reserven der zum Nominalwert aktivierten Papiere) zunehmend zu einer Marktwertbetrachtung der Aktivseite.

Während bisher die alles dominierende Rolle der zum Nominalwert aktivierten Papiere und die Dominanz ihrer Zinserträge die Vorstellung von einer starr (i.e. kapitalmarktunabhängig)

bilanzierten Aktivseite mit fast eben so starren Zinserträgen, die sich nur langsam durch Neuanlage zu aktuellen Konditionen, nicht aber durch tägliche Marktwertschwankungen ändern, rechtfertigte, muss nunmehr eine Marktwertbetrachtung und die dazu korrespondierende explizite Beachtung der Volatilität der Kapitalerträge an ihre Stelle treten.

Mit anderen Worten: Eine natürliche Gewinnbeteiligung sollte den Zinsüberschuss durch einen Kapitalertragsüberschuss ersetzen, nicht notwendig verbal, sondern vor allem methodisch.

#### *1.4.3 Unterschiedlicher Garantiegrad von laufender und Schluss- Gewinnbeteiligung*

In der Praxis heißt das nach unserer Auffassung vor allem ein systematisches Überdenken und eine grundlegende Neukonzeption der Rolle der Schlussgewinnbeteiligung. Verglichen mit der laufenden Gewinnbeteiligung, die – einmal gutgeschrieben – unwiderruflich garantiert ist (eine häufig als lock-in Effekt oder Cliquet-Option bezeichnete Eigenschaft), stellt die Schlussgewinnbeteiligung ein wesentlich volatileres Element des Leistungsversprechens dar. Der regelmäßig vereinbarte Vorbehalt einer notfalls (als ultima ratio) auch nachträglich möglichen Kürzung von Schlussgewinnanteilen erlaubt ihren Einsatz als Sicherheitsmittel in der Kapitalausstattungsrechnung und führt zu einer modellmäßigen Korrespondenz zwischen Schlussüberschussbeteiligung und außerordentlichen Kapitalerträgen bzw. Schlussüberschussanteilsfonds und Bewertungsreserven:

- Zu dem geringeren Garantiegrad der Schlussüberschussanteile (verglichen mit der Cliquet-Option der laufenden Überschussanteile) korrespondiert bei natürlicher Gewinnbeteiligung die höhere Volatilität der außerordentlichen Kapitalerträge (verglichen mit den ordentlichen Erträgen aus „Zinszahlungen“).
- Zum hohen Garantiegrad der laufenden Gewinnbeteiligung und ihrer starren Passivierung (regelmäßige Beibehaltung der anfangs vereinbarten Rechnungsgrundlagen) korrespondiert die starre Aktivierung großer Teile der marktüblichen Portfolios deutscher Lebensversicherer zum Nominalwert.
- Zum Ansatz des aus zugewiesenen Schlussüberschussanteilen gespeisten Schlussüberschussanteilsfonds als Teil der die Solvabilitätsspanne bedeckenden Sicherheitsmittel der Passivseite korrespondieren bei natürlicher Gewinnbeteiligung und einer Marktwertbetrachtung die aus außerordentlichen, nicht realisierten Erträgen gebildeten Bewertungsreserven der Aktivseite.

Diese Korrespondenzen verstehen wir als Teil einer für Zwecke der Produktgestaltung angemessenen und für die Gestaltung der Gewinnbeteiligung natürlichen aktuariellen Modellbildung, nicht als Interpretation mit zivil- oder handelsrechtlichen Konsequenzen und nicht als starres Schema zur aktuariellen Steuerung von Assets und Liabilities.

Dementsprechend ist ein weiteres Ziel dieser Arbeit die pragmatische Präzisierung dieser Modellvorstellung, verbunden mit einigen quantitativen Illustration ihrer Konsequenzen. Natürliche Gewinnbeteiligung im hier verstandenen Sinne erschöpft sich nicht im Ansatz von Zinsgewinnen als Prozentsatz eines zeitnahen Zinsträgers, sondern strebt eine Abbildung auch der Chancen und Risiken der Kapitalanlage in der Produktgestaltung an.

#### 1.4.4 *Natürliche Gewinnbeteiligung, Zeitwert und Rückkaufswert*

Eine weitgehend akzeptierte Präzisierung der versicherungsvertragsrechtlichen Begriffe Zeitwert und Rückkaufswert existiert derzeit in Deutschland nicht. Aktuelle Diskussionspunkte sind unter anderem die Frage eines retrospektiven oder prospektiven Ansatzes, die Bewertung der Schlussgewinnbeteiligung, die Rolle der Bewertungsreserven und allgemeiner die Frage nach Garantie und Kapitalmarktabhängigkeit der Rückkaufswerte.

Die beschriebene Modellvorstellung kann hier einen weiteren Stein in das Gedankengebäude einfügen, und zwar sowohl für die laufende als auch für die Schluss- Gewinnbeteiligung:

- Der Wert volatiler Kapitalanlagen wie z.B. Aktien weist kurzfristig starke Schwankungen auf, die sich mit wachsendem Zeithorizont aber nivellieren und einem langfristigen „Erwartungswert“ annähern. Die (modellmäßig, nicht handelsrechtlich) durch volatile Kapitalanlagen bedeckten Verpflichtungen sollten daher im Sinne eines konsequenten Asset Liability Managements idealtypisch ein ähnliches Verhalten aufweisen. Im Sinne unserer Korrespondenz heißt das, dass zu Beginn große Teile der Gewinnbeteiligung als Schlussgewinnbeteiligung anfallen müssten und damit insbesondere einem evtl. Anpassungsbedarf unterliegen, während zum Ablauf hin der Anpassungsbedarf nahezu verschwindet und nur als ultima ratio für den Fall eines Crashes bestehen bleibt, so dass vermehrt laufende Gewinnbeteiligung gegeben werden kann und der Anteil der Schlussgewinnbeteiligung durch das Ausmaß eines stets möglichen Crashes bestimmt wird. Konkret führt dies in unserm Modell dazu, dass im vorzeitigen Kündigungsfall die Abschläge von z.B. dem Schlussüberschussanteilfonds (sei es nun durch die Wahl des Zeitwertbegriffs oder die Festsetzung der Stornoabschläge bei Rückkauf) vor allem in den ersten Jahren drastisch höher ausfallen sollten als unmittelbar vor Ablauf.
- Eine „normale“ (konkret: nicht inverse) Zinsstruktur heisst niedrigere Zinserträge für kurzlaufende und höhere Zinserträge für länger laufende festverzinsliche Kapitalanlagen. Ein (gedankliches, weder handelsrechtlich wirksames noch in der operativen Kapitalanlage notwendigerweise umgesetztes) duration matching von Assets und Liabilities heißt dann im Rahmen einer natürlichen Gewinnbeteiligung: Der „Zeitwert“ der laufenden Gewinnbeteiligung einer nach kurzer Zeit vorzeitig aufgelösten Lebensversicherung sollte gedanklich auf einer niedrigeren laufenden Überschussbeteiligung beruhen als derjenige eines nach mittlerer oder längerer Zeit vorzeitig aufgelösten Vertrags. Hierzu korrespondiert z.B. eine vertragliche Regelung, die bei vorzeitiger Kündigung eines Prämiendepots die Neufestsetzung eines abgesenkten Zinses ab Beginn vorsieht. Natürlich schließt dies nicht aus, dass ein wachsendes Unternehmen mit nachhaltig positivem Cash Flow, das hieraus alle Leistungen bezahlen kann und sich deshalb de facto in dieser Hinsicht von der Fristigkeitsabhängigkeit der Kapitalerträge abkoppeln kann, dies als Wettbewerbsvorteil zur Darstellung hoher anfänglicher Rückkaufswerte nutzt.

#### 1.4.5 *Wie natürlich soll die Produktgestaltung, vor allem die Gewinnbeteiligung sein?*

Versicherung ist wesentlich pauschaler Ausgleich im Kollektiv; natürliche Produktgestaltung und Gewinnbeteiligung ist wesentlich Berücksichtigung der individuellen Gegebenheiten des Einzelfalls. Der Ausgleich dieser unterschiedlichen Anforderungen ist eine schwierige Aufgabe des Aktuars, die berechtigterweise viel Raum für individuelle Einschätzungen bietet. Unsere Auffassung hierzu wird durch folgende Eckpunkte gekennzeichnet:

- Transfers von Mitteln zwischen einzelnen Versicherungen zum Ausgleich von Unterschieden in der Risiko-, Kosten- und Kapitalertrags- Situation sind nicht a priori bedenklich, sondern sogar konstitutiv für Versicherungen. Gefährlich werden sie erst, wenn ihr Gleichgewicht gestört wird und sie „aus dem Ruder laufen“.
- Für die aktuarielle Steuerung, insbesondere das Asset Liability Management, ist es von zentraler Bedeutung, die Auswirkungen unterschiedlicher vertragsindividueller Gegebenheiten und die dadurch induzierten Mitteltransfers qualitativ und quantitativ zu kennen, um das Risikopotential von pauschalen Nivellierungen zu erkennen, in seiner Größenordnung zu erfassen und entsprechende Risikovorsorge zu betreiben.
- Bei der konkreten Produktgestaltung kann mit pauschalen Festsetzungen der Forderungen von Kunden und Vertrieb nach einfachen, transparenten Regelungen und der Anforderung der operativen Bereiche, vor allem der Datenverarbeitung, nach einfachen, kostengünstig umzusetzenden Regelungen nachgekommen werden.
- Die Möglichkeiten der Pauschalierung enden dort, wo Kunden und Vertrieb die Möglichkeit zur gezielten Arbitrage gegen den Risikoträger in wirtschaftlich relevantem Umfang gegeben wird. Aus dem Bereich der Kostenkalkulation ist dies auch in Deutschland leidlich bekannt; aus dem Bereich der Kapitalanlage bietet der Zusammenbruch mehrerer Lebensversicherer in den USA vor Jahrzehnten ein lehrreiches Beispiel.

### *1.5 Rechnungszins und Direktgutschrift*

Die Berücksichtigung unterschiedlicher Garantiegrade ist ein Kernelement unserer Auffassung einer natürlichen Gewinnbeteiligung. Der hierzu verwendete Modellierungsansatz erlaubt auch eine pauschale quantitative Betrachtung des Rechnungszinses in Abhängigkeit von der Volatilität der Kapitalerträge.

Gleiches gilt für den abgeschwächten Garantiegrad, mit dem üblicherweise die traditionelle Direktgutschrift ausgestattet wird.

### *1.6 Ein einfaches Portfoliomodell der Kapitalanlagen*

Voraussetzung und Input für unsere Modellbildung ist ein einfaches Portfoliomodell für die Kapitalanlage von Lebensversicherungsunternehmen, das zur quantitativen Illustration möglicher Entwicklungen der Kapitalerträge und Anlagerisiken geeignet ist, jedoch nicht zur Prognose der künftigen Anlageerträge dienen kann und soll. Es basiert auf einem einfachen und wohlbekannten Multifaktormodell und der Markowitz-Portfoliotheorie in ihrer einfachsten Form sowie einer pauschalen Normalverteilungsannahme.

### *1.7 Der Transfer von der Aktiv- auf die Passivseite*

Den Transfer vom Portfoliomodell der Assets zu dem beschriebenen Modell der versicherungstechnischen Verpflichtungen leisten wir, indem wir Ertragsersparung und Risiko der Kapitalanlage in den Begriffen

- eines konfidenten Zinses
- eines Sicherheitserfordernisses an die Kapitalausstattung

bündeln und beide Begriffe in Gestalt

- von garantierten oder in Aussicht gestellten Verzinsungen der kundenbezogenen Zinsträger
- von Sicherheitsmitteln des Unternehmens

auf die Seite der Verpflichtungen und ihrer Reservierung spiegeln.

### *1.8 Eine Bemerkung zur Methodik*

Für Zwecke der Produktgestaltung sind einfache und ggf. pauschale Methoden gefragt, während die aktuarielle Steuerung hochintegrierte und komplexe Modelle verlangt. Klassischerweise manifestiert sich dies dadurch, dass in Deutschland die Produktkalkulation nach wie vor auf dem Äquivalenzprinzip und analytischen Formeln zur Prämienkalkulation beruht, während im Bereich der aktuariellen Steuerung verbreitet Cash Flow Modelle und zunehmend auch stochastische Simulationen verwendet werden.

Wir versuchen in dieser Arbeit, die Anforderungen der Kapitalanlage an die Produktgestaltung durch pauschal vereinfachte analytische Formeln zu modellieren und bleiben damit im traditionellen methodischen Kanon der Produktgestaltung, auch wenn wir einige Ergebnisse anhand von stochastischen Simulationen in einem elementaren Sparplanmodell verdeutlichen. Hierin unterscheidet sich unser Ansatz von den üblicherweise auf stochastischen Simulationen von Cash Flows im Rahmen eines hochgradig integrierten komplexen Modells beruhenden Ansätzen zum Asset Liability Management im Kontext der aktuariellen Steuerung.

Abschliessend sei angemerkt, dass wir Ergebnisse gelegentlich mit mehr als einer Nachkommastelle angeben, um den Vergleich nahe beieinander liegender Werte zu erleichtern – nichtsdestotrotz geht die Genauigkeit der hier verwendeten simplen Ansätze nicht über eine signifikante Nachkommastelle hinaus.

## **2. Ein einfaches Portfoliomodell der Kapitalanlagen**

Um die Abhängigkeiten der Produktgestaltung von der strategischen Asset-Allocation modellieren zu können, beschreiben wir ein einfaches, rudimentäres Multifaktormodell für die Kapitalanlagen, das der Anwendung auf die Produktgestaltung zu Grunde gelegt wird. Ziel ist dabei die quantitative Illustration, nicht die Prognose, möglicher Entwicklungen der Anlageerträge und –risiken als Funktion der strategischen Asset Allocation zum Zweck der mittel- und langfristigen Passivsteuerung durch geeignete Produktgestaltung.

### *2.1 Renditebegrif*

Die in der deutschen Lebensversicherung gängigen Renditebegriffe wie z.B. laufende Durchschnittsverzinsung, Nettoverzinsung oder vollständige Nettoverzinsung eignen sich aufgrund des gewünschten Übergangs zu einem Marktwertmodell nicht. Orientiert man sich vollständig an Marktwerten und verwendet den bankenüblichen Total Return, so wird zwar die „echte“ Ertragskraft aus betriebswirtschaftlicher Sicht abgebildet, aber

- unserem primären Interesse am Asset Liability Management wird insofern nicht Rechnung getragen, als Anlagestrategien, die das Unternehmen typischerweise zur Sicherung von Zinszusagen auf der (unter HGB weitgehend starr bewerteten)

Passivseite verfolgt und die mit (korrespondierend starr bewerteten) speziellen Assetklassen auf der Aktivseite umgesetzt werden, nicht abgebildet werden,

- es fehlen Vergleichsdaten zur Kalibrierung des Modells, da in den Geschäftsberichten nach HGB nur die zum Anschaffungswert aktivierten abschreibungspflichtigen Kapitalanlagen mit ihrem Marktwert angegeben werden.

Aus diesem Grund betrachten wir die nachfolgend definierte „Marktwertverzinsung“ als fundamentale Renditegröße. Für ihre Definition ist der Begriff des „disponiblen“ Kapitals, d.h. des nach unternehmensinterner Einschätzung für den gewinnorientierten Handel verfügbaren, nicht im Asset Liability Management von Zinszusagen oder anderweitig im Unternehmen gebundenen Kapitals entscheidend. Assetklassen, die erklärtermaßen und nachhaltig zum Asset Liability Management von Zinszusagen eingesetzt werden oder aus anderen Gründen regelmäßig bis zur Endfälligkeit gehalten werden, sind in diesem Sinne nicht disponibel.

Grob gesprochen kann man die nicht disponiblen Kapitalanlagen z.B.

- mit den Vermögensanlagen identifizieren, die im Rahmen betriebsinterner Risikomodelle oder im Kontext von Risk Based Capital Modellen internationaler Ratingagenturen definitiv dem Asset Liability Management von Zinszusagen zugeordnet werden, insofern bis zur Endfälligkeit gehalten werden, daher faktisch keinem Marktrisiko unterliegen und deshalb nicht mit Risikokapital hinterlegt werden,
- mit einem „held to maturity“ Bestand nach IAS vergleichen, ohne dass hier eine formale Identifikation beabsichtigt ist.

Basierend auf der Formel der Nettoverzinsung wird zur Ermittlung der Marktwertverzinsung an Erträgen zusätzlich zu den ordentlichen und außerordentlichen Erträgen der HGB-Bilanz auch die Veränderung der Bewertungsreserven des disponiblen Kapitals gezählt, und die Bezugsgröße ist wie bei der Nettoverzinsung der mittlere Kapitalanlagebestand, wobei allerdings das disponible Kapital mit den Marktwerten und die nicht disponiblen Assetklassen mit ihren Buchwerten eingerechnet werden. Dies ist insofern sachgerecht, als evtl. vorhandene stille Gewinne oder stille Verluste bei nicht disponiblen Assetklassen regelmäßig wegen des Haltens bis zur Endfälligkeit nicht realisiert werden.

Als disponibles Kapital setzen wir in dieser Arbeit zu Illustrationszwecken durchgängig die nach HGB zum Anschaffungswert aktivierten Assetklassen an, deren Bewertungsreserven publikationspflichtig sind. Nicht disponibel sind also die zum Nominalwert aktivierten Kapitalanlagen. Ihr Einsatz zum Asset Liability Management von Zinszusagen entspricht dem HGB - Bilanzierungsparadigma und der Praxis der meisten Unternehmen. Beispielberechnungen für die Marktwertverzinsung deutscher Lebensversicherer sind damit wegen der Publikationspflicht für die Bewertungsreserven der disponiblen Kapitalanlagen marktweit für einige (wenn auch wenige) Jahre, bei manchen Unternehmen auch länger möglich. Mit unserer Setzung verfolgen wir damit in anderem Kontext einen analogen Ansatz wie Stephan in seiner Dissertation ([Steph]).

## 2.2 Portfoliomodell

Orientiert an der Markowitz-Portfolio-Theorie werden Annahmen über den Erwartungswert  $E(X)$ , die Standardabweichung  $s(X)$  und die paarweisen Korrelationen  $COR(X,Y)$  bzw. Kovarianzen  $COV(X,Y)$  der Renditevariablen  $X, Y, \dots$  der einzelnen Assetklassen fixiert.

Diese können aus historischen Portfoliodaten hergeleitet werden, indem die entsprechenden Parameter mit statistischen Methoden anhand der nach Assetklassen gegliederten Portfoliodaten geschätzt werden (retrospektiver Ansatz) oder anhand begründeter Einschätzungen für die Zukunft gesetzt werden (prospektiver Ansatz).

Beim retrospektiven Ansatz werden die Teilrenditen, Standardabweichungen und Korrelationen der Assetklassen für die Zwecke dieser Arbeit durch die historische Entwicklung eines geeigneten Performance - Index dargestellt. Der Portfolioindex wird dann mittels der festgelegten Gewichtung der einzelnen Assetklassen und der Entwicklung der Assetklassen anhand der gewählten Indizes historisch hergeleitet. Aus dieser resultierenden zeitlichen Entwicklung des Modellportfolios ergeben sich somit Rendite und Risiko des Modellportfolios, ohne dass explizit Annahmen über Korrelationen der Assetklassen untereinander zu treffen sind (diese werden implizit durch die Wahl der repräsentierenden Indizes festgelegt).

Beim prospektiven Ansatz werden die Teilrenditen, Standardabweichungen und Korrelationen hypothetisch gesetzt. Die Portfoliorendite ergibt sich anhand der mit ihren durchschnittlichen Anteilen gemäß der strategischen Asset Allocation gewichteten Teilrenditen der einzelnen Assetklassen. Unter Hinzunahme der Korrelationen ergibt sich dann auch die Standardabweichung des Modellportfolios.

Zwar erhält man ein relativ grobes und nicht immer homogenes Portfoliomodell, welches aber den Vorteil hat, dass es

- nur Standardparameter der Portfoliotheorie verwendet, für die hinreichende Marktdaten vorliegen,
- zu einfachen analytischen Formeln führt,
- auch Nicht - Aktuaren vermittelbar ist.

Gegebenenfalls kann eine Verbesserung der Modellierung durch lineare Regression (d.h. Modellierung des **b**-Faktors zum gegebenen Index) erreicht werden.

Die Auswahl der Assetklassen erfolgt aufgrund betriebswirtschaftlicher Kriterien, Kapitalmarktusancen und einer homogenen, nachhaltigen Rendite – Risiko - Klassifizierung. Folgende repräsentative marktweite Indizes wurden für die entsprechenden Assetklassen verwendet:

Aktien	DAX
Abschreibungspflichtige festverzinsliche Titel (ISCHV)	REXP
Zum Nominalwert bilanzierte festverzinsliche Titel (NSCHV)	Umlaufrendite von Anleihen der öffentlichen Hand gemäß Bundesbankstatistik

Die Wahl der Umlaufrendite für die zum Nominalwert bilanzierten festverzinslichen Titel korrespondiert dabei zu ihrem Einsatz im Asset Liability Management der Zinszusagen und dem entsprechenden Buchwertansatz, die Wahl von Performance – Indizes bei den anderen Assetklassen zum Marktwertansatz bei der Definition der hier stets betrachteten Marktwertverzinsung. Will man die Laufzeitstruktur des Portfolios der nicht disponiblen Assetklassen etwas genauer abbilden, kann man z.B. von einer revolving Anlage in

zehnjährigen Papieren bei Wiederanlage der Erträge ausgehen und dementsprechend im dynamischen Beharrungszustand das arithmetische 10-Jahres-Mittel der genannten Umlaufrendite betrachten. Dies führt zu stochastisch abhängigen Periodenrenditen, die aber dennoch im Rahmen des hier betrachteten Modells behandelt werden können, indem man wie Stephan ([Steph]) ggf. die Summenterme mitschleppt.

In den weiteren Betrachtungen werden folgende Portfolio-Varianten betrachtet:

Portfolio	Aktien	ISCHV	NSCHV
Musterportfolio	15%	20%	65%
„30% Aktien“	30%	20%	50%
„60% Aktien“	60%	20%	20%
„30% ISCHV“	15%	30%	55%
„40% ISCHV“	15%	40%	45%

Aus der retrospektiven Analyse erhält man folgende Ergebnisse über einen 10-Jahres-Zeitraum von 1989 - 1998 für einen Portfolio-Index mit konstanten Quoten der einzelnen Assetklassen (bei dem die Quoten durch regelmäßiges Umschichten unabhängig von der unterschiedlichen Wertentwicklung der Assetklassen konstant gehalten werden):

Konstante Quoten	Erwartungswert	Standardabweichung
Musterportfolio	8,38	3,38
30% Aktien	9,80	6,71
60% Aktien	12,71	13,80
30% ISCHV	8,52	3,86
40% ISCHV	8,67	4,39

Der Übergang zu einem 20-Jahres-Zeitraum bringt kaum andere Werte, so dass wir im Folgenden zur Illustration beim angegebenen Zeitraum bleiben. Dagegen führt der Übergang zu einem buy-and-hold Portfolio-Index zu einer um 1 – 2 Prozentpunkte deutlich erhöhten Volatilität bei mit rund 0,5% nicht vergleichbar steigendem Erwartungswert:

Buy and Hold	Erwartungswert	Standardabweichung
Musterportfolio	8,75	4,48
30% Aktien	10,36	8,56
60% Aktien	13,23	15,70
30% ISCHV	8,88	4,88
40% ISCHV	9,01	5,33

Die im Vergleich zur Strategie der konstanten Quoten höhere Volatilität rührt daher, dass im Fall konstanter Quoten bei steigenden Aktienmärkten tendenziell verkauft, bei fallenden Aktienmärkten tendenziell gekauft wird, um die Quoten konstant halten zu können.

Der Abgleich mit einer Studie der ZEW ([ZEW]) ergibt, dass die Tendenzaussagen und Größenordnungen der auf diesem Wege ermittelten Daten für Rendite und Risiko im Rahmen der für die Produktsteuerung ausreichenden groben Genauigkeit plausibel sind.

### 2.3 Back Tracking des Portfoliomodells

Für einen Vergleich des Portfoliomodells mit der tatsächlich erzielten Marktwertverzinsung eines deutschen Beispielunternehmens (Back Tracking) erhält man bei Ansatz historischer Buchwertquoten für den betrachteten Zeitraum das folgende Ergebnis:

Back Tracking	Erwartungswert	Standardabweichung
Theoretisches Portfoliomodell	8,48	3,07
Tatsächlich erzielte Marktwertverzinsung	8,31	3,15

Für den hier verfolgten illustrativen Zweck und für Zwecke der Produktsteuerung erhält man also offenbar eine ausreichende Modellgenauigkeit, obwohl die Indizes auf Marktwerten basieren und im Modell Buchwertquoten für die einzelnen Assetklassen verwendet wurden. Die Daten des Back Trackings rechtfertigen auch den Ansatz des Musterportfolios.

### 2.4 Notationen und Verteilungsannahmen

Um die Notationen zu fixieren, beginnen wir mit der Beschreibung der zugrundeliegenden Zufallsvariablen und Verteilungsannahmen. Hierzu unterscheiden wir zwei einfache Zinsmodelle, das *arithmetische* und das *geometrische Modell*.

- *Arithmetisches Modell*

Bezeichne  $R_j$  die Marktwertverzinsung im Jahr  $j$  der Versicherungsdauer  $1, \dots, n$ . Die Zufallsvariable  $R_j$  sei normalverteilt mit Erwartungswert  $\mathbf{m}_j$  und Standardabweichung  $\mathbf{s}_j$ , kurz:

$$R_j \sim N(\mathbf{m}_j; \mathbf{s}_j).$$

Die für mehrjährige Betrachtungen interessante *arithmetische Durchschnittsrendite* ergibt sich als

$$\bar{R} := \bar{R}_{arithm.} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n R_j.$$

Der Erwartungswert der Verteilung von  $\bar{R}$  ist

$$E(\bar{R}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{m}_j.$$

Falls die  $R_j$  unabhängig voneinander sind, ist  $\bar{R}$  ebenfalls normalverteilt mit Varianz

$$Var(\bar{R}) = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \mathbf{s}_j^2.$$

Sind die  $R_j$  sogar unabhängig und identisch verteilt mit  $\mathbf{m}_j = \mathbf{m}$  und  $\mathbf{s}_j = \mathbf{s}$ , so ergibt sich

$$\bar{R} \sim N\left(\mathbf{m}; \frac{\mathbf{s}}{\sqrt{n}}\right),$$

d.h. die Standardabweichung nimmt mit der Wurzel der Versicherungsdauer ab.

▪ *Geometrisches Modell*

Bezeichne  $X_j$  die Marktwertverzinsung im Jahr  $j$  der Versicherungsdauer  $1, \dots, n$  und  $R_j$  die zugehörige stetige Marktwertverzinsung. Dann sind beide Zufallsvariablen verbunden durch

$$1 + X_j = \exp(R_j), \quad R_j = \ln(1 + X_j).$$

Die Zufallsvariable  $R_j$  sei wie im arithmetischen Modell normalverteilt gemäß  $R_j \sim N(\mathbf{m}_j; \mathbf{s}_j)$  und  $X_j$  damit definitionsgemäß lognormalverteilt ( $1 + X_j \sim \text{LN}(\mathbf{m}_j; \mathbf{s}_j)$ ) mit Erwartungswert und Varianz

$$E(X_j) = E(\exp(R_j)) - 1 = \exp\left(\mathbf{m}_j + \frac{\mathbf{s}_j^2}{2}\right) - 1;$$

$$\text{Var}(X_j) = \text{Var}(\exp(R_j)) = \exp(2\mathbf{m}_j + \mathbf{s}_j^2) \cdot (\exp(\mathbf{s}_j^2) - 1).$$

Die *geometrische Durchschnittsrendite* von  $X_j$  wird durch das geometrische Mittel der Aufzinsungsfaktoren definiert:

$$\bar{X} := \bar{X}_{\text{geom.}} = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n (1 + X_j)} - 1.$$

Mit dieser Notation ergibt sich für die Erwartungswerte die Beziehung

$$E(\bar{X}) = E(\exp(\bar{R})) - 1.$$

Für  $\bar{X}$  ergibt sich im Falle der Unabhängigkeit der Periodenrenditen  $R_j$  eine Lognormalverteilung mit

$$E(\bar{X}) = \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{m}_j + \frac{1}{2n^2} \sum_{j=1}^n \mathbf{s}_j^2\right) - 1;$$

$$\text{Var}(\bar{X}) = \exp\left(\frac{2}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{m}_j + \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \mathbf{s}_j^2\right) \cdot \exp\left(\frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \mathbf{s}_j^2 - 1\right).$$

Sind die  $R_j$  und  $X_j$  sogar unabhängig und identisch verteilt mit  $\mathbf{m}_j = \mathbf{m}$  und  $\mathbf{s}_j = \mathbf{s}$ , so ergibt sich

$$1 + \bar{X} \sim \text{LN}\left(\mathbf{m}; \frac{\mathbf{s}}{\sqrt{n}}\right),$$

und die Standardabweichung nimmt wieder mit der Wurzel der Versicherungsdauer ab.

In der Folge nehmen wir für beide Modelle stets die  $R_j$  als unabhängig und identisch normalverteilt mit  $\mathbf{m}_j = \mathbf{m}$  und  $\mathbf{s}_j = \mathbf{s}$  an. Diese finanzmathematisch i.a. unbefriedigende Annahme ist nach unseren Erfahrungen für Zwecke des Produktdesigns hinreichend genau.

### 3. Der Begriff der konfidenten Verzinsung

Das Portfoliomodell liefert mittels Erwartungswert und Standardabweichung der Marktwertverzinsung einfache Aussagen zu Rendite und Risiko der Assets. Um nun den Transfer dieser Aussagen auf das Produktdesign leisten zu können, wird das Modell um einfache Aussagen zur Konfidenz der Rendite unter Berücksichtigung ihres Risikos ergänzt.

#### 3.1 Definitionen

Wir betrachten zunächst ein einzelnes Jahr; hier gilt  $\frac{R_j - \mathbf{m}}{\mathbf{s}} \sim N(0;1)$ . Bezeichnet man mit  $u_a$  das  $a$ -Quantil ( $a < 0,5$ ) und mit  $\Phi$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung, so gilt definitionsgemäß

$$\Phi(u_a) = P\left(\frac{R_j - \mathbf{m}}{\mathbf{s}} \leq u_a\right) = P(R_j \leq \mathbf{m} + u_a \mathbf{s}) = a .$$

Unter Berücksichtigung der Identitäten  $\Phi(u_{1-a}) = 1 - \Phi(u_a)$  und  $u_{1-a} = -u_a > 0$  ergeben sich die Beziehungen

$$\Phi(u_{1-a}) = P\left(\frac{R_j - \mathbf{m}}{\mathbf{s}} \geq u_a\right) = P(R_j \geq \mathbf{m} + u_a \mathbf{s}) = P(R_j \geq \mathbf{m} - u_{1-a} \mathbf{s}) = 1 - a .$$

Dies bedeutet, dass im arithmetischen Modell die Marktwertverzinsung  $R_j$  mit einer Wahrscheinlichkeit von  $1 - a$  über dem als *arithmetischer konfidenter einjähriger Zins zur Shortfallwahrscheinlichkeit  $a$*  bezeichneten Wert

$$k_a = k_{1,a} = \mathbf{m} - u_{1-a} \mathbf{s}$$

liegen wird.

Hieraus lässt sich das Zinsniveau  $c_a = c_{1,a}$  berechnen, welches im geometrischen Modell durch die Periodenrendite  $X_j$  mit einer Wahrscheinlichkeit von  $1 - a$  übertroffen wird. Es gilt:

$$P(X_j \geq c_a) = P(X_j + 1 \geq c_a + 1) = P(R_j \geq \ln(c_a + 1)) ,$$

also ergibt sich  $\ln(c_a + 1) = \mathbf{m} - u_{1-a} \mathbf{s}$  bzw.

$$c_a = c_{1,a} = \exp(\mathbf{m} - u_{1-a} \mathbf{s}) - 1 = \exp(k_{1,a}) - 1 .$$

Der Wert  $c_a = c_{1,a}$  wird als *geometrischer konfidenter einjähriger Zins zur Shortfallwahrscheinlichkeit  $a$*  bezeichnet. Die beiden konfidenten einjährigen Zinsen sind bei gleicher Shortfallwahrscheinlichkeit über dieselbe Relation verknüpft wie die Renditevariablen  $R$  und  $X$ .

Wir betrachten nun die gesamte Versicherungsdauer  $n$ . Man sieht analog,

- dass die arithmetische Durchschnittsrendite  $\bar{R}$  mit einer Wahrscheinlichkeit von  $1 - \mathbf{a}$  über dem *arithmetischen konfidenten  $n$ -jährigen Zins zur Shortfallwahrscheinlichkeit  $\mathbf{a}$*

$$k_{n,a} = \mathbf{m} - u_{1-a} \cdot \frac{\mathbf{S}}{\sqrt{n}}$$

liegen wird.

- dass die geometrische Durchschnittsrendite  $\bar{X}$  mit einer Wahrscheinlichkeit von  $1 - \mathbf{a}$  über dem *geometrischen konfidenten  $n$ -jährigen Zins zur Shortfallwahrscheinlichkeit  $\mathbf{a}$*

$$c_{n,a} = \exp\left(\mathbf{m} - u_{1-a} \cdot \frac{\mathbf{S}}{\sqrt{n}}\right) - 1 = \exp(k_{n,a}) - 1$$

liegen wird.

Wir werden in der Folge häufig stillschweigend benutzen, dass

$$k_{1,a} = \mathbf{m} - u_{1-a} \cdot \sqrt{n} \cdot \frac{\mathbf{S}}{\sqrt{n}} = k_{n,b}$$

gilt, falls  $u_{1-b} = u_{1-a} \cdot \sqrt{n}$  gesetzt wird.

### 3.2 Bestimmung der konfidenten Zinsen

Im Folgenden gehen wir immer von einer definierten festen positiven Shortfallwahrscheinlichkeit  $\mathbf{a}$  nahe Null mit entsprechendem Konfidenzniveau  $1 - \mathbf{a}$  nahe 1 und zugehörigem Quantil  $u_{1-a}$  aus. Um die genannten konfidenten Zinsen zu bestimmen, ist eine Festlegung der Parameter  $\mathbf{m}$  und  $\mathbf{S}$  erforderlich.

Hierzu wird man beim retrospektiven Ansatz wie beschrieben den Portfolioindex herleiten, die Datenreihe der Marktwertverzinsungen ableiten, die Datenreihe der Aufzinsungsfaktoren logarithmieren und beide Ergebnisse – zumindestens optisch, ggf. aber auch statistisch – auf die Angemessenheit einer Normalverteilungsannahme inspizieren. Je nachdem ob man von einer Normalverteilung oder Lognormalverteilung ausgeht, wird man Erwartungswert und Standardabweichung der Renditevariablen selbst oder ihrer zugehörigen stetigen Renditevariablen schätzen: Hierzu kann man sich z.B. des Stichprobenmittels und der Stichprobenvarianz bedienen, die bekanntermaßen Maximum Likelihood Schätzer der entsprechenden Normalverteilungsparameter sind.

Im prospektiven Ansatz wird man Erwartungswert, Standardabweichung und paarweise Korrelationen pro Assetklasse nach begründeter Erwartung ansetzen, hieraus Erwartungswert und Varianz der Portfoliorendite berechnen und für diese eine Normalverteilung oder Lognormalverteilung postulieren.

### 3.3 Arithmetischer oder geometrischer konfidenter Zins ?

Unseren Erfahrungen zufolge liegt der Unterschied von arithmetisch oder geometrisch retrospektiv geschätzten erwarteten Portfoliorenditen bei Berücksichtigung der angegebenen Biaskorrektur in einer Größenordnung von rund 0,1%. Berücksichtigt man, dass wir hier nur

Schlussfolgerungen für Zwecke der Produktgestaltung, vor allem der Ausgestaltung der Gewinnbeteiligung anstreben, nicht aber eine finanzmathematische Portfolioanalyse, so scheint dieser Unterschied vernachlässigbar und die Frage nach der Wahl des arithmetischen (normalverteilten) oder geometrischen (lognormalverteilten) Modells eher zweitrangig.

Im arithmetischen Modell sind die Parameter  $\mathbf{m}$  und  $\mathbf{s}$  direkt interpretierbar als Erwartungswert und Standardabweichung der einjährigen Renditevariablen, dafür wird mehrjährig nur die arithmetische Durchschnittsrendite verwendet. Im geometrischen Modell sind die nachfolgend stets primären Parameter  $\mathbf{m}$  und  $\mathbf{s}$  nur indirekt als Erwartungswert und Standardabweichung der zugehörigen stetigen Rendite interpretierbar, dafür wird mehrjährig die angemessenere geometrische Durchschnittsverzinsung verwendet. Über die angegebene Biaskorrektur und die Beziehung

$$c_{n,a} = \exp(k_{n,a}) - 1$$

lassen sich beide Modelle jedoch völlig problemlos ineinander umrechnen.

Der Einfachheit der Darstellung halber werden wir in der Folge in der Regel das arithmetische Modell unterstellen und den arithmetischen konfidenten Zins verwenden. Umrechnungen auf das geometrische Modell sind wie angegeben stets einfach möglich.

### 3.4 Konfidenter Zins und Sharpe Ratio

Für eine Renditevariable  $R$  und einen Referenzzins  $r$  ist die Sharpe Ratio bekanntermaßen wie folgt definiert:

$$SR(R) = \frac{E(R) - r}{\mathbf{s}(R)}$$

Bei gegebener Sharpe Ratio ermittelt man also den Referenzzins gemäß

$$r = E(R) - SR(R) \cdot \mathbf{s}(R) .$$

Für jede der Renditevariablen  $R$  des arithmetischen Modells und ihren konfidenten Zins  $k$  ist

$$k = E(R) - u_{1-a} \cdot \mathbf{s}(R) .$$

Wählt man speziell eine der iid Periodenrenditen und bezeichnet mit  $SR_a$  die mit den konfidenten einjährigen Zins als Referenzzins berechnete Sharpe Ratio, so ist also

$$SR_a = u_{1-a}$$

und

$$k_{n,a} = \mathbf{m} - \frac{SR_a}{\sqrt{n}} \cdot \mathbf{s} .$$

Im  $\mathbf{m}\text{-}\mathbf{s}$ -Diagramm ist die Sharpe-Ratio die Steigung der Geraden, die durch den Punkt  $(\mathbf{m}, \mathbf{s})$  geht und die Erwartungswertachse bei  $r$  schneidet.

### 3.5 Kalibrierung des konfidenten Zinses

Der konfidente Zins lässt sich durch zwei Methoden kalibrieren:

- *Festlegung der Shortfallwahrscheinlichkeit*

Im Kontext von Risk Based Capital Modellen wird häufig die Shortfallwahrscheinlichkeit selbst festgesetzt. Übliche Anforderungen für eine Kapitalausstattung sind Werte von 5%, 1% oder deutlich darunter. Ein BBB – Rating wird z.B. häufig mit einem Wert von 0,22% assoziiert. Den genannten Werten entsprechen u.a. die folgenden Sharpe Ratios:

<b>a</b>	15,87%	6,68%	5,00%	2,28%	1,00%	0,22%	0,13%
$SR_a = u_{1-a}$	1,00	1,50	1,64	2,00	2,33	2,85	3,00

- *Festlegung der Sharpe Ratio*

Orientiert an der Anwendung auf Lebensversicherer, wählen wir als Referenzzins den in Deutschland im hier betrachteten Zeitraum relevanten, marktüblichen Rechnungszins von 4%. Unsere Erfahrungen zeigen, dass dann für die Sharpe Ratio der Marktwertverzinsung ein Wert von 1 bis 1,5 durchaus realistisch erscheint. Die obige Tabelle liefert eine korrespondierende einjährige Shortfallwahrscheinlichkeit von 6 – 16%. Dem entsprechen die nachfolgend tabellierten  $n$ -jährigen Shortfallwahrscheinlichkeiten:

$n$	1	3	5	10	15	20	25	30
SR = 1	15,87%	4,16%	1,27%	0,08%	0,01%	0,0004%	0,0000%	0,0000%
SR = 1,5	6,68%	0,47%	0,04%	0,0001%	0,0000%	0,0000%	0,0000%	0,0000%

Als Beispiel tabellieren wir für das Musterportfolio den konfidenten Zins, der im 15-Jahres-Zeitraum mit 95%iger Wahrscheinlichkeit erreicht oder überschritten wird, und geben gleichzeitig einen Eindruck vom Unterschied zwischen arithmetischem und geometrischem Modell:

$n$	1	3	5	10	15	20	30	45
$k_n$	1,4	4,5	5,4	6,4	6,8	7,1	7,4	7,6
$c_n$	1,4	4,6	5,6	6,6	7,1	7,4	7,7	7,9

### 3.6 Risikoadjustierte Renditen als Sharpe Ratio zum Referenzzins 0

Wählt man den Referenzzins Null, so ist die zugehörige Sharpe Ratio identisch mit der risikoadjustierten Rendite

$$RaR(R) = \frac{E(R)}{s(R)},$$

die angibt, wieviel Rendite pro Risikoeinheit erwirtschaftet wird. Aus stochastischer Sicht ist dies genau der Kehrwert des bekannten Variationskoeffizienten

$$v(R) = \frac{s(R)}{E(R)} = \frac{1}{RaR(R)}.$$

Bestimmt man  $a$  durch

$$RaR(R) = u_{1-a},$$

also passend zur Sharpe Ratio mit Referenzzins Null, so ist der zugehörige konfidente Zins Null, und wir haben die Wahrscheinlichkeit bestimmt, einen positiven Ertrag zu erwirtschaften:

	buy and hold		konst. Quoten	
	$RaR$	$1-a$	$RaR$	$1-a$
Musterportfolio	1,96	97,5%	2,48	99,3%
30% Aktien	1,21	88,7%	1,46	92,8%
60% Aktien	0,84	80,0%	0,92	82,1%
30% ISCHV	1,82	96,6%	2,21	98,6%
40% ISCHV	1,69	95,5%	1,98	97,6%

Über den Daumen gepeilt heißt das: Bei einer Verdoppelung der Aktienquote steigt die einjährige Verlustwahrscheinlichkeit in diesem Kontext um runde 6 – 10%, und 10% mehr ISCHV steigern die einjährige Verlustwahrscheinlichkeit um runde 1%.

### 3.7 Erweiterung des Modells um einen sicheren Zins

Auch bei der Modellierung des Portfolios kann man eine Sonderrolle der nicht disponiblen Kapitalanlagen (Assetklasse NSCHV) postulieren: Setzt man diese wie geschehen zum Nominalwert an, so gehen Renditeschwankungen in dieser Assetklasse auf schwankende Emissionsrenditen bei Neuanlagen zurück; wenn man zusätzlich die Laufzeitstruktur des Portfolios unter der Prämisse einer revolvingenden (Wieder-) Anlage in zehnjährige Papiere abbildet, ergibt sich die Rendite in diesem Teilportfolio als zehnjähriges Mittel von Emissionsrenditen. Im hier betrachteten Zeitraum ergibt sich dabei ein Wert von knapp 7,2% mit einer Standardabweichung von nur 0,3%. Man beachte allerdings, dass sukzessiv gebildete zehnjährige Renditemittel selbst nicht mehr stochastisch unabhängig sind; trotzdem bleibt ihre Behandlung möglich, solange die Summanden stochastisch unabhängig angenommen werden (vgl. ([Steph]).

Diese niedrige Standardabweichung (die vor allem durch das 10-Jahresmittel, also die revolvingende Anlage) bedingt ist, rechtfertigt es, eine Modellbildung von Kovacevic und Willomitzer ([KW]) aufzugreifen und das Portfolio in Anlehnung an das CAPM zu zerlegen:

- Die Assetklassen Aktien und ISCHV bilden den risikobehafteten Teil des Portfolios (Marktportfolio),
- Die Assetklasse NSCHV repräsentiert einen sicheren Zins (sichere Anlage).

Das Unternehmensportfolio ergibt sich dann im Modell als konvexe Mischung aus der sicheren Anlage und dem Marktportfolio (wir lassen also keine Leerverkäufe zu); seine Rendite ist die entsprechende Konvexkombination des sicheren Zinses und der Rendite des Marktportfolios, und sein Risiko ist das mit der Quote des Marktportfolios gewichtete Risiko

des entsprechenden Marktportfolios (denn der sichere Zins ist konstant). Wir illustrieren dies mit den stets verwendeten Daten des Zehnjahreszeitraums und Marktportfolios, die passend zu den bisher betrachteten Unternehmensportfolios konstruiert werden. Als sicheren Zins verwenden wir das Zehnjahresmittel der Umlaufrenditen im entsprechenden Zeitraum: Es beträgt  $z = 6,7\%$  und reflektiert noch das im Vergleich zu heute höhere Zinsniveau der Vergangenheit.

Marktportfolio	Quote Aktien	Quote ISCHV	Rendite Buy and Hold	Risiko Buy and Hold
MaP1	42,86%	57,14%	11,67	11,41
MaP2	60%	40%	13,07	14,73
MaP3	75%	25%	14,29	17,81

Unternehmens-Portfolio Buy and Hold	Quote sichere Anlage	Quote Marktportfolio	Rendite	Risiko
Musterportfolio	65%	35% MaP1	8,44	3,99
30% Aktien	50%	50% MaP2	9,88	7,37
60% Aktien	20%	80% MaP3	12,77	14,24

Im **m-s**-Diagramm liegt das jeweilige Unternehmensportfolio auf der Geraden, die durch das jeweilige Marktportfolio geht und die Erwartungswertachse bei  $z$  schneidet; seine Position auf dieser Geraden ist durch die Quote der sicheren Anlage bestimmt.

#### 4. Anwendung auf den Rechnungszins

Eine Änderung der strategischen Asset Allocation führt zu einer Veränderung des bei der Kapitalanlage eingegangenen Risikos und hat somit Auswirkungen auf den garantierbaren Rechnungszins. Diese Auswirkungen, die der Markt insofern bestätigt, als entsprechende Produkte mit verstärkter Aktienanlage in Deutschland mit deutlich gesenktem Rechnungszins bereits angeboten werden, werden hier mittels des konfidenten Zinses zu gegebener Shortfallwahrscheinlichkeit und seiner Interpretation als Sharpe Ratio analysiert.

Dazu identifizieren wir den konfidenten einjährigen Zins zu entsprechend geringer Shortfallwahrscheinlichkeit mit dem Rechnungszins. Zur Kalibrierung haben wir die bereits genannten zwei Möglichkeiten: Wir fixieren die Shortfallwahrscheinlichkeit auf rund 85% (einjährig) bzw. unter 0,01% (15 und mehr Jahre) oder fordern eine Sharpe Ratio von 1; beides läuft darauf hinaus,  $SR_a = u_{1-a} = 1$  zu wählen und damit den konfidenten Zins mit

$$k = m - s$$

festzusetzen und das Ergebnis zu plausibilisieren.

Der Wert für die Sharpe Ratio entspricht einer vorsichtigen Vorerwartung; der Wert für die Shortfallwahrscheinlichkeit ist nicht „grob unvernünftig“, aber wegen der fehlenden Berücksichtigung der Kapitalausstattung und der unklaren Auswirkung dieses Mangels nur schwer zu beurteilen. Darüber hinausgehende Begründungen für diese rein illustrativen Setzungen gibt es nicht. Sie führen zu folgendem Ergebnis:

Rechnungszins $k = m - s$	Buy and Hold	Konstante Quoten
Musterportfolio	4,27	4,99
30% Aktien	1,80	3,09
60% Aktien	- 2,47	-1,09
30% ISCHV	4,00	4,66
40% ISCHV	3,68	4,28

Der höheren Volatilität der Buy and Hold Strategie entsprechend, reagiert der Rechnungszins hier deutlich sensibler auf Erhöhungen der Aktienquote.

Alternativ kann man die Sharpe Ratio der Marktwertverzinsung des Portfolios zu einem Referenzzins von 4% (entsprechend dem von 1995 - 2000 Jahre aktuellen Wert) ermitteln und den Rückschluss ziehen auf die Wahrscheinlichkeit, zum Ablauf der Versicherung eine Durchschnittsverzinsung oberhalb dieses Rechnungszinses zu erzielen – dabei wird die bilanzstabilisierende Wirkung der zum Nominalwert aktivierten Titel implizit berücksichtigt, da diese mit ihrem Kupon in die Marktwertverzinsung eingehen, ansonsten aber Marktwerte betrachtet werden. Die Tabelle aus Abschnitt 3.5 zeigt dann, dass je nach Sharpe Ratio des Portfolios von 1 bis 1,5 der Rechnungszins von 4% über Zeiträume von 10 und mehr Jahren mit sehr sehr hoher Wahrscheinlichkeit im Durchschnitt übertroffen wird.

Wir illustrieren diesen alternativen Ansatz zusätzlich am Musterportfolio und verschiedenen Asset Allocations: Dazu ermitteln wir für beide Strategien die Sharpe Ratio zum Rechnungszins von 4% (diese beträgt 1,06 bei Buy and Hold und 1,29 bei konstanten Quoten) und postulieren, dass dieser Wert auch bei einem Wechsel der Asset Allocation beibehalten wird:

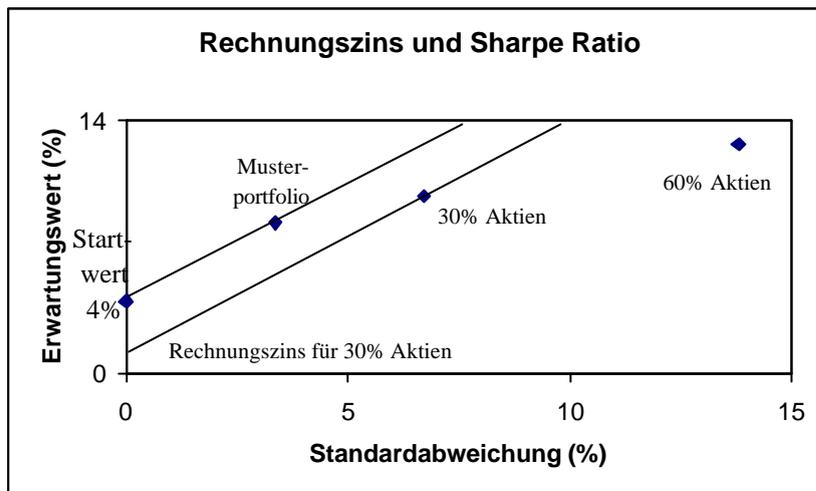
Rechnungszins	Buy and Hold $k = m - 1,06 \cdot s$	Konstante Quoten $k = m - 1,29 \cdot s$
Musterportfolio	4,00	4,00
30% Aktien	1,28	1,13
60% Aktien	-3,42	-5,13
30% ISCHV	3,70	3,53
40% ISCHV	3,36	3,00

Hier reagiert der Rechnungszins bei der Strategie mit konstanten Quoten sensibler auf die Erhöhung des Aktienanteils: Die geringere Volatilität führt bei der Kalibrierung auf das Musterportfolio dazu, dass hier eine höhere Sharpe Ratio angesetzt wird, und dieser höhere Faktor überkompensiert dass im Vergleich zur Buy and Hold Strategie etwas geringere Anwachsen der Volatilität mit dem Aktienanteil.

Geometrisch gesehen heisst das beschriebene Vorgehen Folgendes: Die Gerade, die im  $m-s$ -Diagramm durch den Punkt ( $m_{\text{Musterportfolio}}$ ,  $s_{\text{Musterportfolio}}$ ) geht und die Erwartungswertachse bei 4% schneidet, wird derart parallel verschoben, dass sie durch das jeweils betrachtete Portfolio mit veränderter Asset Allocation geht; der Achsenabschnitt der verschobenen Geraden legt dann jeweils den „Rechnungszins“ fest.

Dies ist nachfolgend illustriert. Man beachte, dass wir hier – im Gegensatz zu der in Abschnitt 3.7 beschriebenen Modellierung – die zum Nominalwert aktivierten Wertpapiere

als Teil des Unternehmensportfolios ansehen und der Rechnungszins die Rolle eines externen Referenzzinssatzes für die Sharpe Ratio übernimmt.



Die absoluten Werte der letzten Tabelle werden insofern durch den Markt bestätigt, als Produkte, die die laut VAG maximal zulässige Aktienquote von 30% maximal ausnutzen, derzeit Rechnungszinsen von 1 – 2 % haben.

In der Praxis wird man bei dem Übergang zu höheren Aktienquoten berücksichtigen, dass hierbei i.a. die Sharpe Ratio etwas sinken wird: Konstante Sharpe Ratio hieße ein proportionales Zunehmen von Exzessrendite und Risiko, tatsächlich muss man aber überproportional wachsendes Risiko und damit sinkende Sharpe Ratio in Kauf nehmen – man vergleiche die Tabelle zu den risikoadjustierten Renditen der einzelnen Portfolios. Dies führt zu etwas höheren Rechnungszinsen als tabelliert, die aber wegen des wachsenden Risikos auch deutlich wachsendes Sicherheitskapital erfordern und die man daher mit Stress Tests und ggf. stochastischen Simulationen überprüfen wird.

## 5. Anwendung auf die Direktgutschrift

In Fortführung der Verhältnisse des bis 1994 regulierten Markts geben viele deutsche Lebensversicherer noch eine sogenannte *Direktgutschrift* in Höhe von üblicherweise 5% des Zinsträgers, die durch zwei Elemente charakterisiert ist:

- Sie wird direkt zu Lasten des Jahresüberschusses finanziert, nicht über die RfB.
- Sie kann nur dann gesenkt werden, wenn sie nachgewiesener Maßen nicht mehr finanziert werden kann.

Damit ist der Garantiegrad der Direktgutschrift deutlich schwächer als derjenige des Rechnungszinses und deutlich stärker als derjenige der Zinsgewinnanteile. Zu seiner Analyse ermitteln wir wie beim Rechnungszins für beide betrachteten Strategien die Sharpe Ratio zum Referenzzins von 5% (diese beträgt 0,84 bei Buy and Hold und 1,00 bei konstanten Quoten und liegt damit um 0,2-0,3 unter derjenigen beim Referenzzins 4%) und postulieren, dass dieser Wert auch bei einem Wechsel der Asset Allocation beibehalten wird.

Dann ergeben sich die folgenden Werte für den Satz der Direktgutschrift in Abhängigkeit von der Asset Allocation:

Direktgutschrift	Buy and Hold $k = m - 0,84 \cdot s$	Konstante Quoten $k = m - 1,00 \cdot s$
Musterportfolio	5,00	5,00
30% Aktien	3,19	3,11
60% Aktien	0,09	-1,05
30% ISCHV	4,79	4,67
40% ISCHV	4,55	4,29

Dies zeigt, dass eine Senkung der Direktgutschrift bei steigender Investition in Aktien angeraten sein kann.

## 6. Rechnungszins und „sicherer Zins“

Die dritte EU – Richtlinie koppelt den maximal zulässigen Rechnungszins an einen Wert von 60% der Rendite festverzinslicher Wertpapiere des entsprechenden Mitgliedsstaates. In Deutschland wird die letztgenannte Rendite präzisiert mit dem 10-Jahres-Mittel der Umlaufrenditen festverzinslicher Wertpapiere der öffentlichen Hand mit einer Restlaufzeit von 1 – 10 Jahren. Dabei wird unterstellt, dass die Unternehmen die letztgenannte Rendite durch entsprechende Kapitalanlage bei positivem Cash Flow und einer Buy and Hold – Strategie erzielen können, und der Abschlag von 40% stellt eine als ausreichend festgelegte Sicherheitsmarge dar.

Das 10-Jahres-Mittel der Umlaufrenditen stellt also einen „sicheren Zins“ dar, zu dem die Lebensversicherungsunternehmen sich zu jedem Zeitpunkt in ausreichender Menge refinanzieren und damit auf der Aktivseite ihrer Bilanz Erträge in entsprechender Höhe generieren können. Im dritten Abschnitt haben wir diesen „sicheren Zins“ entsprechend modelliert und zur Illustration einen Wert von  $z = 6,7\%$  verwendet (hier ging natürlich der Kapitalmarkt der 90er Jahre, insbesondere das Zinshoch am Anfang der Periode ein).

Nach einem Sicherheitsabschlag von 40% können die Unternehmen somit einen garantierten Rechnungszins von 4,0% an ihre Kunden weitergeben; dieser Wert wurde auch in den vorangegangenen Beispielen unterstellt. Lässt man die Kosten des Neugeschäfts für das Unternehmen (Abschlussaufwendungen, Solvabilität, ...) außer Acht, heißt das in Analogie zur Refinanzierung der Unternehmen auf ihrer Aktivseite: Die Kunden können bei den Unternehmen zu jedem Zeitpunkt in beliebiger Menge Gelder zu einem garantierten Zins von 4% anlegen und bestimmen so die Passivseite der Unternehmensbilanz. Aktiv – Passiv – Steuerung hat in dieser Sichtweise die Aufgabe, den sicheren Zins und den Rechnungszins aufeinander abzustimmen, wobei der Anteil der „sicheren Anlage“ im einfachen Portfoliomodell des Abschnitts 3.7 die entscheidende Steuerungsgröße ist.

Zur Illustration dieser Sichtweise unterstellen wir stark vereinfachend, dass der Rechnungszins in alleiniger linearer Abhängigkeit vom Anteil der „sicheren Anlage“ festgelegt wird. Inhaltlich heißt dies, dass die Zinseinnahmen der sicheren Anlage die hierzu passend gematchten Fremdkapitalkosten des Unternehmens finanzieren. Dies ist einerseits eine starke (und in gewissem Sinn unrealistische) Restriktion; andererseits zeigt die sich auf dem Markt durchsetzende actuarielle Gestaltung der durch das Altersvermögensgesetz geförderten fondsgebundenen Produkte mit Garantie des

Beitragserhalts bei Erleben des Ablaufs, dass diese einfache Konstruktion durchaus sinnvoll sein kann.

Voraussetzung für diesen Matching - Ansatz ist die Tatsache, dass aus dem Marktportfolio keine Verluste entstehen (die Wahrscheinlichkeiten hierfür haben wir tabelliert) oder andernfalls diese durch die Kapitalausstattung abgedeckt werden können. Wir kalibrieren diese simplizistische Modellvorstellung dadurch, dass wir den Wert von 4% für das Musterportfolio mit 65% sicherer Anlage festsetzen, und erhalten für die anderen Portfolios

	Rechnungszins
Musterportfolio	4,0%
30% Aktien	3,1%
60% Aktien	1,2%
30% ISCHV	3,4%
40% ISCHV	2,8%

Diese Werte liegen deutlich höher als die bisherigen Werte; das liegt unter anderem daran, dass die risikoadjustierten Renditen der zugehörigen Marktportfolios deutlich sinken und die Verlustwahrscheinlichkeit genau so wie der erforderliche Kapitalbedarf deutlich steigen.

## 7. Stress Test

Das in dieser Arbeit exzessiv praktizierte Hantieren mit Quantilen unter Normalverteilungsannahmen über mehrere Jahre birgt die Gefahr der Unterschätzung von Asymmetrien und „fat tails“ der Renditeverteilung. Ebenso werden im Periodenablauf entstehende Risiken genauso wie ein mit der Asset Allocation veränderter Kapitalbedarf nicht modelliert. Beiden kann man ansatzweise begegnen, indem man die Betrachtungen mit einem Stress Test für das Crash Risiko und zur Absicherung von Kapitalbedarf im Periodenablauf flankiert.

Hierzu gibt es viele Ansätze, z.B.

- den britischen Resilience Test,
- den Stress Test des GDV ([GDV]),
- die Mindestanforderung an einen Stress Test gemäß deutschem Rechnungslegungsstandard DRS 5-20 ([DRS]),
- Risk Based Capital Modelle der amerikanischen Versicherungsaufsicht oder internationaler Rating Agenturen.

Zu Illustrationszwecken wählen wir hier einen sehr einfachen Ansatz:

- Zur Abdeckung des Marktwert- (C1-) Risikos gehen wir von einem Kapitalbedarf in Höhe eines Marktwertverlusts von 35% bei Aktien, 10% bei ISCHV und 0% bei NSCHV (da im Modell keinem Marktrisiko unterliegend) aus.
- Zur Abdeckung aller sonstigen (C2- bis C4-) Risiken ziehen wir die EU – Solvabilitätsspanne heran. Diese modellieren wir zur Illustration pauschal mit 5% der Buchwerte.
- Das resultierende *Sicherheitserfordernis* ist die Summe der beiden Werte (vollständige Korrelation).

- Zur Bedeckung des Sicherheitserfordernisses stehen als *Sicherheitsmittel* bilanzielle Eigenmittelpositionen (ggf. auch ihre Surrogate), die freie RfB, der Schlussgewinnanteilsfonds und die Bewertungsreserven der disponiblen Kapitalanlagen zur Verfügung.

Das Crash - Szenario ist sehr nah am Szenario des GDV-Stress Tests; der unterstellte Marktwertverlust liegt in der Größenordnung von anderthalb Standardabweichungen. Der Ansatz der Sicherheitsmittel ist konsistent mit den in Deutschland geltenden Regularien zur Bedeckung der EU-Solvabilität. Die nicht disponiblen Kapitalanlagen werden in konsequenter Fortführung unseres Ansatzes weder beim Sicherheitserfordernis noch bei den Sicherheitsmitteln angesetzt.

Für die betrachteten Musterportfolios ergibt sich folgende Größenordnung des benötigten Sicherheitserfordernisses in % der Buchwerte (man beachte, dass die Stresstestfaktoren oben in % der Marktwerte angegeben sind):

	Sicherheitserfordernis
Musterportfolio	13,21%
30% Aktien	20,00%
60% Aktien	36,36%
30% ISCHV	14,44%
40% ISCHV	15,70%

## 8. Analyse der Gewinnbeteiligung

Um die Auswirkungen der strategischen Asset Allocation auf die Gewinnbeteiligung zu verdeutlichen, reduzieren wir im Rahmen des arithmetischen Modells einen in Deutschland üblichen Lebensversicherungsvertrag gegen laufende Beitragsleistung mit natürlicher Gewinnbeteiligung auf seinen kapitalbildenden (Spar-) Aspekt. Man erhält so einen Sparplan, der bei natürlicher Gewinnbeteiligung drei Zinsversprechen mit abgestuften Garantiegraden entsprechend der „Bonität“ der Leistungszusagen aufweist:

- Das ab Vertragsbeginn garantierte Guthaben wird mit einem garantierten Zins von beispielsweise  $r = 4\%$  berechnet.
- Die jährliche Erhöhung des Guthabens durch die laufende Gewinnbeteiligung beruht auf einer laufenden Gesamtverzinsung von z.B.  $Br = 7\%$ .
- Die jährliche Erhöhung des Guthabens durch die Schlussgewinnbeteiligung beruht auf einer im Mittel tatsächlich für Fremdkapital zu erzielenden Gesamtverzinsung inkl. Schlussgewinnbeteiligung von z.B.  $Sr = 8\%$ .

Hierbei wird im Sparplan - Modell

- der Rechnungszins  $r$  wie beschrieben anhand der Forderung nach einer seiner absoluten Garantie angemessenen minimalen Shortfallwahrscheinlichkeit festgesetzt, was wir äquivalent durch eine entsprechende Sharpe Ratio  $SR$  ausdrücken,
- die laufende Gesamtverzinsung  $r + Br$  anhand der Forderung nach einer auf dem deutschen Markt üblicherweise nachgefragten hohen Stetigkeit der Gewinnbeteiligung als konfidenter Zins mit einem die „Stetigkeit“ quantifizierenden Sicherheitsniveau  $1 - a$  festgesetzt,

- die Bonusrate  $Br$  aus der Differenz zwischen laufender Gesamtverzinsung und Rechnungszins ermittelt,
- die Durchschnittsrendite  $R \equiv \bar{R}$  im arithmetischen Modell als die am Kapitalmarkt langfristig erzielbare Marktwertverzinsung angesehen,
- der durchschnittlich für die Gewinnthesaurierung in freier RfB und Bewertungsreserven sowie zur Ausschüttung an die Aktionäre zur Verfügung stehende Teil des Jahresüberschusses als Marge  $U_g$  aus der Durchschnittsrendite finanziert und vereinfacht als „Unternehmensgewinn“ bezeichnet,
- die um den Unternehmensgewinn gekürzte Marktwertverzinsung  $R - U_g$  als Gesamtverzinsung inkl. Schlussgewinn aufgefasst,
- dementsprechend die Differenz  $Sr$  der Gesamtverzinsung inkl. Schlussgewinn und der laufenden Gesamtverzinsung als Schlussgewinnrate festgesetzt und als Modellierung der kurzfristigen Schwankungen am Kapitalmarkt interpretiert („Zinsspitzen“).

Dieses retrospektiv angelegte Sparplan-Modell erlaubt in einfacher Weise die kanonische Darstellung einer natürlichen Zinsüberschussbeteiligung unter Marktwertgesichtspunkten. Das Zufallsrisiko der Marktwertverzinsung bedingt die drei Zinsversprechen mit unterschiedlichen Garantiegraden, das Änderungsrisiko begründet das mit einem Stress Test quantifizierte Sicherheitserfordernis. Der in Deutschland übliche Prozess der jährlichen Vorausdeklaration der Gewinnanteilsätze erlaubt die Beherrschung des Zufallsrisikos, der in Abschnitt 7 beschriebene Ansatz der Sicherheitsmittel ermöglicht die Beherrschung des Änderungsrisikos, wobei die Begründung der Sicherheitsmittel sich aus ihrer „Fungibilität“ angesichts der unterschiedlichen Garantiegraden der Leistungszusagen aus Stammversicherung und Gewinnbeteiligung herleitet.

Formelmäßig stellt sich das Modell mit den bereits eingeführten Bezeichnungen wie folgt dar (wobei wir zur quantitativen Illustration wie bereits beschrieben die Sharpe Ratio anhand eines für das Buy and Hold - Musterportfolio postulierten Wertes für den Rechnungszins von 4% kalibrieren und für die Gewinnbeteiligung pauschal  $n = 15$ ,  $a = 5\%$ ,  $U_g = 0,4\%$  setzen):

$$r = m - SR \cdot s = m - 1,0607 \cdot s$$

$$r + Br = k_{n,a} = m - \frac{u_{1-a}}{\sqrt{n}} \cdot s$$

$$Br = (r + Br) - r = \left( SR - \frac{u_{1-a}}{\sqrt{n}} \right) \cdot s = 0,6360 \cdot s$$

$$r + Br + Sr = m - U_g$$

$$Sr = (m - U_g) - \left( m - \frac{u_{1-a}}{\sqrt{n}} \cdot s \right) = \frac{u_{1-a}}{\sqrt{n}} \cdot s - U_g = 0,4247 \cdot s - 0,4$$

Man beachte, dass wir einen betragsmäßig fixen Unternehmensgewinn zu Lasten des Schlussgewinns aus der Differenz von erwarteter Marktwertverzinsung und laufender Gesamtverzinsung (konfidemem Zins) finanzieren wollen – dies wird natürlich nicht bei jeder Kombination von Parameterwerten gelingen (formal wird  $Sr$  dann negativ). Alternativ kann man als Erstes den Unternehmensgewinn als fixe Marge finanzieren, den dementsprechend reduzierten erwarteten Zins als Basis für die Kalibrierung der laufenden Gesamtverzinsung nehmen und den entsprechend verbleibenden Saldo als Schlussgewinn ansetzen. Auch die Forderung nach „positivem Rechnungszins“ und „positiver Bonusrate“

schränken die sinnvollen Parameterkombinationen offenbar ein. Sieht man von einigen algebraischen Umformungen der angegebenen Formeln ab, kann man auch hier bei Bedarf auf das geometrische Modell des konfidenten Zinses übergehen.

Die obige Parameterwahl entspricht den nachfolgend tabellierten Sicherheitsniveaus:

Zins	einjährig	15jährig	40jährig
$r$	85,6%	99,998%	100%
$r + Br$	66,5%	95%	99,6%
$r + Br + Sr$	53,6%	63,5%	71,4%

Diese Zahlen sind lediglich als Illustration zu sehen, die den „Bonitätsgrad“ der Zinsversprechen quantifizieren – angesichts der groben Modellierung und der durch die Normalverteilung nicht abgebildeten „fat tails“ dürfte das tatsächliche Sicherheitsniveau niedriger liegen. Die angegebenen, mit dem Bonitätsgrad sinkenden Sicherheitsniveaus verdeutlichen auch quantitativ die Relevanz der passivseitigen Puffer freie RfB und Schlussgewinnfonds.

Ein Übergang zu Portfolios mit anderer Asset Allocation führt im Sparplanmodell zu folgenden Ergebnissen:

	10 Jahre (1989-1998)											
	buy and hold						konstante Quoten					
	$\mu$	$\sigma$	$r$	$Br$	$Sr$	$r+Br$	$\mu$	$\sigma$	$r$	$Br$	$Sr$	$r+Br$
Musterportfolio	8,746	4,475	4,000	2,846	1,500	6,846	8,376	3,384	4,000	2,939	1,037	6,939
30% Aktien	10,358	8,558	1,281	5,443	3,234	6,724	9,801	6,708	1,127	5,825	2,449	6,952
30% ISCHV	8,877	4,878	3,703	3,102	1,672	6,805	8,524	3,861	3,532	3,353	1,240	6,884
40% ISCHV	9,010	5,330	3,357	3,390	1,863	6,747	8,674	4,391	2,996	3,813	1,465	6,809

Die Tabelle liefert ein klares Fazit:

- Die Schlussgewinnbeteiligung (ausgedrückt als Zinssatz durch die Schlussgewinnrate) variiert hier stark mit der strategischen Asset Allocation, ein doppelter Aktienanteil heißt grob gesprochen gut doppelte Schlussgewinnrate.
- Wegen des parallel sinkenden Rechnungszinses variiert auch die laufende Gesamtverzinsung (Bonusrate): Doppelter Aktienanteil bedeutet grob gesprochen knapp doppelte Bonusrate.
- Insgesamt bleibt die laufende Gesamtverzinsung trotz der bei Einbeziehung der Bonusrate wachsenden Gesamtverzinsung inkl. Schlussgewinnbeteiligung fast konstant bei 6,8 % - 6,9 %. Die gesamte Verzinsung inkl. Schlussgewinnbeteiligung wächst dabei um den gleichen Wert wie die Schlussgewinnrate: Die Mehrrendite bei volatilerer Anlage ist offenbar Schlussgewinnbeteiligung!

## 9 Sicherheitsmittel und stochastische Simulationen

Die diskutierten einfachen Ansätze zur Bewertung von Zinsversprechen lassen eine valide Bewertung des Einflusses vorhandener Sicherheitsmittel nicht zu. Um im Kontext des hier betrachteten Sparplanmodells auch elementare Aussagen hierzu zu illustrieren, verwenden wir einfache stochastische Simulationen, die relativ unaufwändig mit einem Tabellenkalkulationsprogramm realisiert werden können und nachfolgend beschrieben werden sollen.

Das (wissenschaftlichen Ansprüchen nicht genügende, aber zur Illustration verwendbare) Zufallszahlenprogramm der Tabellenkalkulation liefert 1000 unabhängig und identisch normalverteilte Renditewerte als stochastischen Zins mit vorgegebenem Erwartungswert  $m$  und Standardabweichung  $s$ . Die Aktiva entwickeln sich durch Zufluss frischen Geldes und stochastische Verzinsung gemäß

$$Aktiva = (Aktiva + Nettozufluss) + (Aktiva + Nettozufluss / 2) \cdot zins^{stoch}.$$

Die Kundenguthaben als Passiva wachsen durch Beitragszuflüsse, garantierte Verzinsung und geglättete laufende Zinsüberschüsse. Letztere ergeben sich als konvexe Mischung der deklarierten Bonusrate  $Br$  und des Lock – In – Anteils des den Rechnungszins übersteigenden Teils des stochastischen Zinses, wobei der Überzins begrenzt wird:

$$Guth = (Guth + Nettozufluss) + \\ (Guth + Nettozufluss / 2) \cdot \\ (r + \min((1 - glätt) \cdot lock \cdot \max(zins^{stoch} - r; 0) + glätt \cdot Br; zins^{Max} - r))$$

Dabei wird der Lock – In – Anteil durch

$$lock = \frac{Br}{m - r} \text{ bzw. } Br = lock \cdot (m - r)$$

definiert. Die Simulation startet mit einem Aktivüberhang  $iniCap$ , der vor den und im Verlauf der Simulationen als Summe der nicht separat modellierten Sicherheitsmittel gemäß Abschnitt 8 aufgefasst wird:

$$Sicherheitsmittel(0) = Aktiva(0) - Guth(0) = iniCap ; \\ Sicherheitsmittel(m) = Aktiva(m) - Guth(m)$$

Über einen Horizont von bis zu 20 Jahren betrachten wir die Wahrscheinlichkeit, dass diese Sicherheitsmittel einen erforderlichen Wert (required Capital) nicht unterschreiten:

$$P(Sicherheitsmittel \geq reqCap)$$

Die Schlussgewinnbeteiligung wird nicht als Teil der Kundenguthaben modelliert, genau so wenig wie Vertragsbeendigungen jeder Art: In diesem Modell ist sie voll und ganz ein Teil der Sicherheitsmittel, der allerdings bei hier nicht modellierten Vertragsbeendigungen in ebenfalls nicht spezifizierter Höhe planmäßig ausgezahlt wird.

Einige Spezialfälle verdeutlichen die Modellierung: Für  $lock = 1$  wird nur laufende Gewinnbeteiligung in maximaler Höhe deklariert ( $Sr = 0$ ,  $U_g = 0$ ), für  $lock = 0$  entfällt die gesamte Gewinnbeteiligung auf Schlussgewinne. Für  $glätt = 1$  ist die laufende Deklaration konstant, für  $glätt = 0$  folgt sie unmittelbar dem stochastischen Zins.

Die Deklaration von laufender Gewinnbeteiligung erfordert Sicherheitsmittel wegen der permanenten Gewinnsicherung durch die Cliquet - Option und der damit verbundenen Erhöhung des Zinsgarantierisikos; die Deklaration von Schlussgewinnbeteiligung vermeidet diese Erhöhung des Zinsgarantierisikos und schafft Sicherheitsmittel wegen des wachsenden Schlussgewinnanteils und seiner Anrechnung auf die Kapitalausstattung. Die Risikoexposition des Unternehmens wird daher vor allem bestimmt durch die Wahl von Rechnungszins und Bonusrate. Flankierend zu einer Senkung des Rechnungszinses kann deshalb eine Erhöhung des Anteils der Schlussgewinnbeteiligung das Unternehmensrisiko deutlich mindern. Diese bereits an Hand der konfidenten Verzinsung begründete Tendenz wird durch die nachfolgenden stochastische Simulationen verstärkt illustriert.

Wir betrachten zwei Portfolios, die sich wie das Musterportfolio und das Portfolio 30% Aktien zusammensetzen, mit pauschal prospektiv geschätzten Annahmen für Rendite und Risiko. Den Rechnungszins und die Deklarationsparameter wählen wir mit den Formeln von Abschnitt 8, das Sicherheitserfordernis bestimmen wir wie in Abschnitt 7.

<b>Portfolio</b>	<b><math>m</math></b>	<b><math>s</math></b>	<b><math>r</math></b>	<b><math>Br</math></b>	<b><math>Sr</math></b>	<b><math>lock</math></b>	<b>Sicherheits- erfordernis</b>
wenig Aktien	8	3	4,00	2,73	0,87	68,15%	13,21%
viel Aktien	10	6,5	1,33	5,91	2,36	68,15%	20,00%

Hier ist  $Sr_a = 1,333 = u_1 - a$  mit einem theoretisch ermittelten einjährigen Sicherheitsniveau von  $1 - a = 90,88\%$ .

Wir unterstellen stets einen jedes Jahr um 3% steigenden Nettozufluss von anfänglich 5% und führen 1000 Simulationen durch. Zunächst starten wir als *Habenichts* ohne vorhandene Sicherheitsmittel, aber auch ohne Kapitalanforderung ( $iniCap = 0$ ,  $reqCap = 0$ ) und ermitteln anhand von 1000 Simulationen die Wahrscheinlichkeit, stets den Rechnungszins zahlen zu können ( $lock = 0$ ):

<b>Horizont / Portfolio</b>	<b>1</b>	<b>5</b>	<b>10</b>	<b>15</b>	<b>20</b>
wenig Aktien	91,20%	90,10%	90,10%	90,10%	90,10%
viel Aktien	90,60%	88,90%	88,90%	88,90%	88,90%

Das einjährige Sicherheitsniveau der Simulation bestätigt den theoretischen Wert von 90,88%. Da bei den Simulationen im Gegensatz zu den vorangegangenen Abschnitten das Einhalten der o.a. Ungleichung für jedes Jahr und nicht nur bei Ablauf gefordert wird, liegen die mehrjährigen Werte ebenfalls in dieser Größenordnung.

Unter Verwendung unveränderter Zufallszahlen gehen wir jetzt von der oben tabellierten Wahl von  $r$  und  $Br$  aus – dann werden zwei Drittel des gesamten Überzinses entsprechend 76% (wenig Aktien) bzw. 71% (viel Aktien) des deklarierten Überzins als laufende Gewinnbeteiligung mit Cliquet – Option gegeben. Wir unterstellen eine Glättung der

Gewinnbeteiligung von 70% und anfänglich vorhandene Sicherheitsmittel in Höhe des doppelten Sicherheitserfordernisses (*üppige* Kapitalausstattung): Für das Portfolio mit wenig Aktien bedeutet das Sicherheitsmittel von gut 26%, die z.B. aus 1,5% Eigenmitteln, 3,5% freier RfB, 5% Schlussüberschussanteilsfonds und gut 16% Bewertungsreserven stammen könnten. Darüber hinaus fordern wir, dass der Stress Test stets bestanden wird ( $iniCap = 2 \cdot$  Sicherheitserfordernis,  $reqCap =$  Sicherheitserfordernis) – dies ist dann mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten der Fall:

<b>Horizont / Portfolio</b>	<b>1</b>	<b>5</b>	<b>10</b>	<b>15</b>	<b>20</b>
<i>wenig Aktien</i>	100,00%	99,80%	99,60%	99,60%	99,50%
<i>viel Aktien</i>	99,90%	98,40%	97,10%	97,00%	97,00%

Man sieht unmittelbar,

- dass im Fall des Portfolios mit wenig Aktien der Stress Test „fast sicher“ eingehalten werden kann,
- dass beim Übergang auf „viel Aktien“, Anpassung von Rechnungszins und Bonusrate entsprechend dem Modell aus Abschnitt 8 und unveränderter Glättung der Gewinnbeteiligung der Stress Test mit nahezu vergleichbarer Sicherheit erfüllt werden kann.

In diesem Sinne bestätigt es die Angemessenheit der Modellbildung des konfidenten Zinses.

Das Bild ändert sich drastisch bei *spartanischer* Kapitalausstattung, wenn zu Beginn der Stress Test gerade bestanden wird ( $iniCap =$  Sicherheitserfordernis  $= reqCap$ ). Für das Musterportfolio könnte das aufgrund durchschnittlicher Eigenmittel von z.B. 1% und niedrigen Werten von 1,5% für die freie RfB und 2,5% für den Schlussüberschussanteilsfonds (also einer exakten Bedeckung der Solvabilität von 5%) sowie Bewertungsreserven von gut 8% der Fall sein.

<b>Horizont / Portfolio</b>	<b>1</b>	<b>5</b>	<b>10</b>	<b>15</b>	<b>20</b>
<i>wenig Aktien</i>	71,00%	58,10%	55,50%	54,80%	54,70%
<i>viel Aktien</i>	74,20%	61,30%	60,10%	59,80%	59,70%

Hier muss die starke Glättung aufgegeben werden, d.h. die Deklaration häufiger oder stärker gesenkt werden.

Die vorangegangenen Betrachtungen sagen nichts aus über den Einfluss der Schlussgewinnbeteiligung. Wir teilen jetzt gedanklich den bisher amorphen Block der Sicherheitsmittel auf und spezifizieren den im Modell bei Ausscheiden dem Kunden mitzubehaltenden Anteil der Schlussgewinnbeteiligung. Zur Illustration betrachten wir nur den Ablauf der Versicherung und teilen in diesem Fall dem Guthaben noch die zur anfangs tabellierten Schlussgewinnrate  $Sr$  entsprechende Schlussgewinnbeteiligung zu. Die Fremdkapitalkosten von 6,73% bei rein laufender Gewinnbeteiligung und z.B. wenig Aktien wachsen damit auf einen Wert von 7,6% durch Einführung der Schlussgewinnbeteiligung.

Wir vergleichen dies mit einer aus Fremdkapitalkostensicht „äquivalenten“ Erhöhung nur der laufenden Gewinnbeteiligung auf eine Bonusrate von  $Br = 3,6\%$  (d.h. der Lock – In –

Faktor steigt auf  $lock = 90\%$ ) bei wegfallender Schlussgewinnbeteiligung ( $Sr = 0$ ). Für den Fall vieler Aktien erhält man entsprechend die Werte  $Br = 8,3\%$  und  $lock = 95,4\%$ .

Dies ergibt im Fall des Habenichts eine anhand der Quantile berechenbare einjährige Wahrscheinlichkeit von rund 55% bei wenig und 60% bei viel Aktien, diese Fremdkapitalkosten ohne „Verlust“ zahlen zu können. Wir fordern jetzt wieder die stets betrachtete Kapitalausstattung gemäß Abschnitt 7 und gehen zu ihrer oben definierten spartanischen bzw. üppigen Variante über, d.h. führen die obigen Rechnungen erneut durch mit einem auf die genannten Werte erhöhten Lock – In – Grad, der die Ersetzung von Schlussgewinnbeteiligung durch laufende Gewinnbeteiligung bei gleicher Gesamtverzinsung aus Kundensicht widerspiegelt: Hierdurch sinkt die Wahrscheinlichkeit, den erforderlichen Stress Test stets zu bestehen, drastisch:

<b>spartanisch</b>	<b>Schlussgewinn</b>	<b>1</b>	<b>5</b>	<b>10</b>	<b>15</b>	<b>20</b>
<b>wenig Aktien</b>	<b>ohne</b>	50.90%	26.60%	19.70%	18.00%	17.20%
	<b>mit</b>	71.00%	58.10%	55.50%	54.80%	54.70%
<b>viel Aktien</b>	<b>ohne</b>	49.80%	25.20%	18.10%	14.30%	12.80%
	<b>mit</b>	74.20%	61.30%	60.10%	59.80%	59.70%

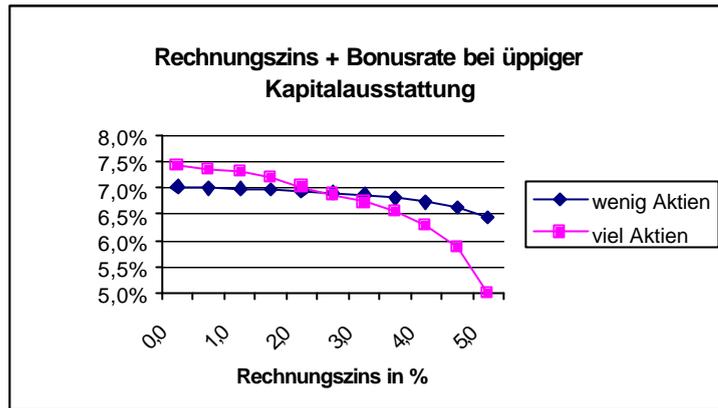
<b>üppig</b>	<b>Schlussgewinn</b>	<b>1</b>	<b>5</b>	<b>10</b>	<b>15</b>	<b>20</b>
<b>wenig Aktien</b>	<b>ohne</b>	100.00%	98.70%	91.50%	85.20%	81.50%
	<b>mit</b>	100.00%	99.80%	99.60%	99.60%	99.50%
<b>viel Aktien</b>	<b>ohne</b>	99.50%	87.30%	72.00%	64.00%	58.40%
	<b>mit</b>	99.90%	98.40%	97.10%	97.00%	97.00%

Man sieht direkt an Hand des Vergleichs, dass bei spartanischer Kapitalausstattung ein hoher Anteil der Schlussgewinnbeteiligung unverzichtbar ist, und erkennt an Hand der absoluten Zahlen, dass selbst dann noch die Glättung stark gesenkt, d.h. die Deklaration stärker und häufiger angepasst werden muss. Bei der üppigen Kapitalausstattung erkennt man die Abhängigkeit von der Asset Allocation: Während bei wenig Aktien ggf. noch auf die Schlussgewinnbeteiligung verzichtet werden könnte, ist dies trotz der satten Kapitalausstattung bei viel Aktien auf keinen Fall mehr angemessen.

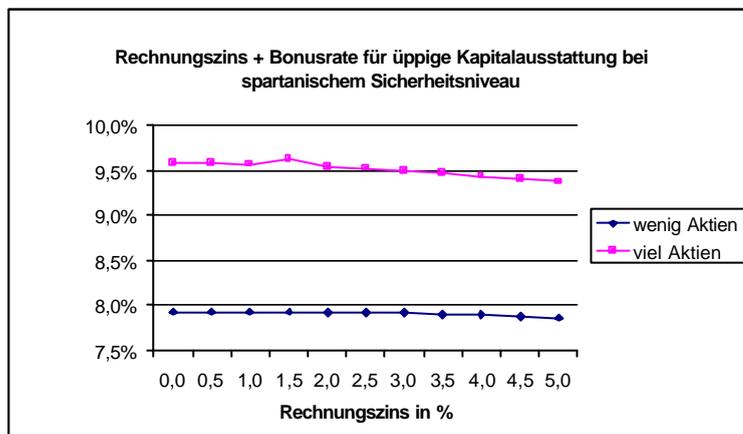
Wir betrachten jetzt die Abhängigkeit von Rechnungszins und Lock – In – Satz. Für die zuerst betrachtete üppige Kapitalausstattung und unveränderte Glättung von 70% betrachten wir jetzt den gemäß Abschnitt 8 gewählten Rechnungszins von 4% (wenig Aktien) bzw. 1,33% (viel Aktien); dann wird nach o.a. Tabelle mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,6% (wenig Aktien) bzw. 97% (viel Aktien) der Stress Test über einen Horizont von 15 Jahren stets bestanden.

Wir variieren nun den Rechnungszins von 0% bis 5% und passen per Zielwertsuche den Lock – In – Satz so an, dass über den 15-Jahres-Horizont der Stress Test mit unveränderter Wahrscheinlichkeit bestanden wird. Dies führt zu einer laufender Gesamtverzinsung, die als Funktion des Rechnungszinses mit steigendem Rechnungszins (Garantieniveau) abnimmt. Den funktionalen Verlauf zeigt die nachfolgende Grafik.

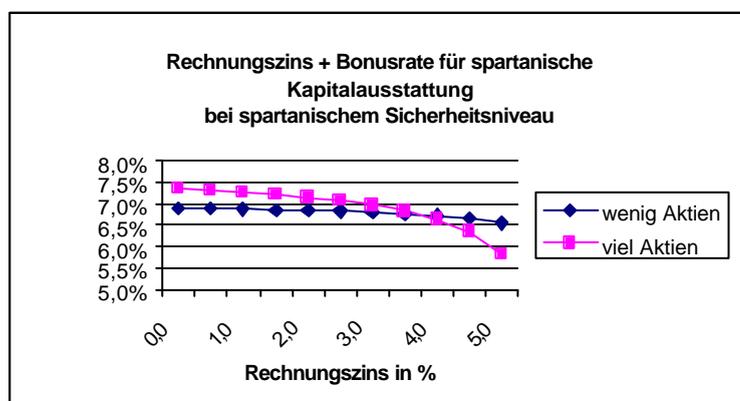
Man erkennt direkt, in welchem Ausmaß eine steigende Zinsgarantie Performance kostet, und dass das Ausmaß des Performance – Verlusts mit der Aktienquote als Folge der wachsenden Portfoliovolatilität steigt.



Wir behalten die üppige Kapitalausstattung bei und senken zur Illustration in einem ersten Schritt nur das Sicherheitsniveau auf den (natürlich ungenügenden) Wert von knapp 55% (wenig Aktien) bzw. knapp 60% (viel Aktien), den wir bei der spartanischen Kapitalausstattung ermittelt hatten:



Die laufende Gesamtverzinsung ist nahezu unabhängig von der Wahl des Rechnungszinses und liegt nahe am Erwartungswert. Im zweiten Schritt senken wir bei ansonsten unveränderten Parametern die Kapitalausstattung auf das spartanische Niveau:



Der Verlauf der Kurve zeigt wieder das bekannte Bild, allerdings flacher als bei der ersten Grafik – dies ist vor allem auf das niedrigere Sicherheitsniveau zurückzuführen.

## 10 Konfidente Terminzinssätze

Das Sicherheitsniveau der konfidenten Zinssätze wird nur über die gesamte Laufzeit erreicht; für die jeweils abgelaufenen Jahre der Versicherungsdauer gilt ein niedrigeres Sicherheitsniveau. Will das Unternehmen angesichts der gesetzlich vorgeschriebenen jederzeitigen Kündigungsmöglichkeit des Kunden Arbitrage vermeiden und bei Kündigung wie Ablauf das gleiche Sicherheitsniveau haben, so muss zu jedem Zeitpunkt  $1 \leq m \leq n$  die Durchschnittsverzinsung der vergangenen  $m$  Jahre der zugehörigen konfidenten  $m$ -jährigen Verzinsung mit konstanter Shortfallwahrscheinlichkeit entsprechen.

Dies führt zum Begriff der *konfidenten Terminzinssätze*, deren Definition man erhält, wenn man die Folge der konfidenten  $n$ -jährigen Zinsen im geometrischen Modell als Momentaufnahme einer Zinsstrukturkurve auffasst (die mit der Wurzel der Dauer steigt und daher nicht invers ist) und hierzu die zugehörigen spot rates betrachtet, in Formeln:

$$s_{1,a} = c_{1,a};$$

$$s_{m,a} = (1 + c_{m,a})^m / \prod_{j=1}^{m-1} (1 + s_{j,a}) - 1;$$

Verzinst man einen festen Einmalbeitrag mit den Zinssätzen  $s_{1,a}, \dots, s_{n,a}$ , so entspricht die geometrische Durchschnittsverzinsung zu jedem Zeitpunkt  $m$  dem konfidenten Zins  $c_{m,a}$ , wird dementsprechend also nur mit Wahrscheinlichkeit  $a$  unterschritten. Für das Unternehmen heißt das: Die Fremdkapitalkosten für vorzeitige Leistungen und Abläufe können mit dem gleichen Sicherheitsniveau finanziert werden.

Dieses Modell kann auf laufende Beitragszahlung angepasst werden, indem man diese als über die Beitragszahlungsdauer  $t$  sukzessiv gezahlte Einmalbeiträge auffasst:

$$s_{1,a}^{lfd} = s_{1,a};$$

$$X_k = \sum_{j=1}^{\min(t,k)} \prod_{l=1}^{k-j+1} (1 + s_{l,a});$$

$$s_{k,a}^{lfd} = \begin{cases} X_k / (1 + X_{k-1}) - 1; & k \leq t \\ X_k / X_{k-1} - 1; & k > t \end{cases}$$

Allerdings schränkt die Komplexität der Formeln ihre praktische Anwendbarkeit ein, zumal der Unterschied sich häufig als nicht all zu groß erweist.

## 11 Auswirkungen auf vorzeitige Leistungen

Aus Vereinfachungsgründen wird man für die Gewinnbeteiligung Zinssätze deklarieren wollen, die

- unabhängig von der Versicherungsdauer
- unabhängig von der abgelaufenen Dauer

sind. Im Beispiel des Abschnitts 8 kann das z.B. heißen, die laufende Gesamtverzinsung an Hand des konfidenten Zinses für eine Dauer von 15 Jahren zu bestimmen und diesen Wert unabhängig vom tatsächlichen Wert der Versicherungsdauer beizubehalten. Für Leistungen vor Ablauf dieser 15-Jahres-Frist hat man dann „zuviel“ laufende Gewinnbeteiligung gegeben, d.h. die Wahrscheinlichkeit ihrer Erwirtschaftung liegt unter dem nach 15 Jahren angesetzten Wert; für die laufende Gewinnbeteiligung nach Ablauf der Frist hat man dagegen eine höhere Wahrscheinlichkeit ihrer Erwirtschaftung. Ebenso ist der relative Anteil der Schlussgewinnbeteiligung am Anfang eher zu klein (denn kurzfristig sind hohe Schwankungen zu erwarten) und am Ende eher zu hoch (denn langfristig gleichen sich die Schwankungen aus).

Ebenso kann man die deklarierten Zinssätze für die Musterdauer 15 Jahre für jedes Jahr der Versicherungsdauer gleich wählen, z.B. gleich dem konfidenten Zins zum Ablauf. Dann wird man bei vorzeitigen Leistungen eine geringere Wahrscheinlichkeit haben, den aus dieser Deklaration folgenden Zinsbedarf auch tatsächlich erwirtschaftet zu haben.

Beide Effekte wird man eher pauschal bei der Ermittlung von Zeitwert und Rückkaufswert kompensieren wollen; sie führen dann zu fallenden Abschlägen von dem aus der  $m$ - und  $n$ -unabhängigen Deklaration resultierenden Kapitalwert. Die hier vorgestellten Formeln erlauben eine einfache pauschale Quantifizierung solcher Abschläge z.B. in % des Deckungskapitals nach Prämiengrundlagen.

Wichtiger jedoch sind die Hinweise, die beide Effekte für die nach HGB erforderliche Anhebung der Deckungsrückstellung auf den Rückkaufswert (Zeitwert abzgl. vereinbarter Stornoabschläge) gibt. Faktisch wird diese Bestimmung derzeit dazu genutzt, den Anteil der Schlussgewinnbeteiligung an der Gewinnbeteiligung insgesamt im Rahmen einer natürlichen Gewinnbeteiligungsgestaltung zu begrenzen (vgl.[Kun]): Nur ein nach oben begrenzter Anteil der Gewinnbeteiligung kann als Schlussgewinn gegeben werden; Gewinne ab einer gewissen Grenze müssen zwangsweise als laufende Gewinnbeteiligung gegeben, mit Cliquet - Option laufend gutgeschrieben und als Deckungsrückstellung reserviert werden. Diese Arbeit zeigt, dass gerade eine natürliche Gewinnbeteiligung jedoch bedeuten kann, in Abhängigkeit von Dauer, abgelaufener Dauer und vor allem natürlich der strategischen Asset Allocation mehr oder weniger Schlussgewinne zu geben. Insbesondere bei hohen Aktienquoten ist es angesichts des kurz- und mittelfristig stark steigenden Anlagerisikos sehr „natürlich“, im Sinne der o.a. Formeln über weite Strecken der Versicherungsdauer den weitaus größten Teil der Gewinnbeteiligung als Schlussgewinne zu geben. Dies wird durch die stochastischen Simulationen in Abschnitt 9 bestätigt.

Wir ermitteln zur Illustration dieses Effekts modellhaft das Verhältnis von Schlussgewinnanteilen SGA und laufenden Gewinnanteilen LGA im Sparplanmodell, indem wir wie in [Kun] die Endwerte eines gleichmäßigen Sparvorgangs mit den jeweiligen Zinssätzen im Kontext der Tabelle aus Abschnitt 8 vergleichen: Mit

$$S(i) = \frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{(1+i) - 1}$$

setzen wir daher

$$\text{SGA in \% LGA} = \frac{S(r + Br + Sr) - S(r + Br)}{S(r + Br) - S(r)} = \frac{S(m - U_g) - S(m - \frac{u_{1-a}}{\sqrt{n}} \cdot s)}{S(m - \frac{u_{1-a}}{\sqrt{n}} \cdot s) - S(m - SR \cdot s)}$$

und betrachteten die verschiedenen Portfolien:

n = 15	10 Jahre (1989-1998)							
	Buy and Hold				konstante Quoten			
	r	Br	Sr	SGA in % LGA (in %)	r	Br	Sr	SGA in % LGA (in %)
Musterportfolio	4,000	2,846	1,500	64,65	4,000	2,939	1,037	42,50
30% Aktien	1,281	5,443	3,234	89,03	1,127	5,825	2,449	61,58
30% ISCHV	3,703	3,102	1,672	67,41	3,532	3,353	1,240	45,81
40% ISCHV	3,357	3,390	1,863	70,32	2,996	3,813	1,465	49,11

Man sieht unschwer an Hand der Tabelle, dass die Schlussgewinnbeteiligung leicht die Größenordnung der laufenden Gewinnbeteiligung erreichen kann. Für das Buy and Hold – Portfolio mit 30% Aktien zeigt eine weitere Rechnung, dass für die Dauer 40 z.B. fast doppelt so viel Schluss- wie laufende Gewinnbeteiligung „natürlich“ ist.

**Literatur**

- [AGP] Allerdissen, Klaus; Gauß, Ulrich; Pannenberg, Michael: Zur Bestimmung einer aktuariell begründeten Zinsgarantie in der Lebensversicherung unter Berücksichtigung unternehmensindividueller Sachverhalte. Ausarbeitung der Arbeitsgruppe Rechnungszins der deutschen Aktuarvereinigung e.V., z.Z. in Diskussion mit den verantwortlichen Aktuaren.
- [DRS] Deutsches Rechnungslegungs Standards Committee e.V.: Bekanntmachung des Deutschen Rechnungslegungs Standards Nr. 5 – 20 (DRS 5-20) – Risikoberichterstattung von Versicherungsunternehmen -. Bundesanzeiger Nummer 98b vom 29. Mai 2001
- [GDV] Gesamtverband der Deutschen Versicherungswirtschaft, Kapitalanlageausschuss, Kommission „Risikosteuerung“: Durchführung von Stress - Tests bei Versicherungsunternehmen. GDV Vorstands Rundschreiben 2639/1999 vom 16.12.1999
- [JQ] Jeffery, T.; Quinn, E.: Demographic Margins for Prudence. Transactions of the 26th International Congress of Actuaries, Birmingham 1998, Volume 6
- [KW] Kovacevic, Raimund; Willomitzer, Michael: Überlegungen zur Effizienz der Veranlagungsportfolios von Lebensversicherern. Versicherungswirtschaft (14) 2001
- [Kun] Kunkel, Kurt - Wolfgang:: Schlussüberschussanteil und natürliches Überschussystem. Der Aktuar 5 (1999), Heft 1
- [PS] Pannenberg, M.; Schütz, E.: Sicherheitszuschläge für biometrische Rechnungsgrundlagen in der Lebensversicherung. Transactions of the 26th International Congress of Actuaries, Birmingham 1998, Volume 6
- [Steph] Stephan, Thomas G.: Strategische Asset Allocation in Lebensversicherungsunternehmen. Veröffentlichungen des Instituts für Versicherungswissenschaft der Universität Mannheim, Band 46. Verlag Versicherungswirtschaft VVW, Karlsruhe 1995
- [ZEW] Dornau, Robert; Szczesny, Andrea: 250 Analysten, 1 Portfolio? Eine ökonomische Analyse von Empfehlungen zur Gestaltung eines Vermögensportfolios zur Altersvorsorge. Discussion Paper No. 99-17, Zentrum für Europäische Wirtschaftsforschung (ZEW), Mannheim 1999

Die im Rahmen dieser Arbeit angesprochenen Themen haben wir mit vielen Kollegen diskutiert. Für ihre Diskussionsbereitschaft danken wir insbesondere den Mitgliedern der DAV - Arbeitsgruppe Asset Liability Management sowie Norbert Heinen, Bodo Schmithals und Claudia Cottin.