Método de Proyecciones Demográficas y Actuariales a Población Abierta con Presentación Matricial

Act. Elizabeth Calleja Rosas.
Act. Carmen Rábago Martínez.
Act. José Muriel Delsordo.
Act. Alfredo Villas Cabró.

1. Introducción

El objeto del presente estudio es proporcionar un modelo actuarial para evaluar planes de pensiones a población abierta utilizando un método matricial. Mediante este mecanismo se pretende simplificar el cálculo de dichas pensiones agrupando a la población de acuerdo a las características más importantes para este efecto como son: la edad del individuo a la fecha de cálculo (x), el salario a la misma fecha (S_x) y la edad de ingreso a la compañía (y).

Los resultados obtenidos presentarán de una manera clara y comprensible los flujos que la Institución deberá reservar con el fin de pagar los montos necesarios tanto a sus pensionados, como a los beneficiarios de éstos año con año. Asimismo, permitirá analizar el comportamiento de la población a través del tiempo considerando que ésta no se mantiene cerrada y que, por consiguiente, se llevan a cabo nuevas contrataciones que permiten no sólo mantener el número total de empleados constante, sino en muchos casos, incrementar los recursos laborales constantemente.

Adicionalmente, este modelo permite evaluar, en caso de ser requerido, los valores actuariales ya conocidos para el grupo en estudio como por ejemplo, el Valor Presente Actuarial de las Obligaciones que es de gran utilidad para el diseño de los planes de beneficios.

Cabe mencionar que las matrices empleadas en el método aquí expuesto no presentan el comportamiento matemático formal de este tipo de estructuras, sino simplemente se utilizan como arreglos que permitan una simplificación tanto en la presentación de la información como en el cálculo de los valores de interés.

El presente estudio se divide, para su completa exposición, como se presenta a continuación:

Primeramente se definirán las hipótesis y bases necesarias para llevar a cabo las proyecciones utilizando este método. Estas hipótesis y bases pueden agruparse en 3 categorías: Hipótesis Poblacionales, Hipótesis Biométricas e Hipótesis Financieras.

La parte medular del trabajo corresponde a la metodología en donde se exponen sin pérdida de generalidad y paso a paso, los cálculos requeridos para obtener el resultado final deseado.

Finalmente se expondrán las conclusiones en donde se enumeran los beneficios del modelo aquí desarrollado, con el fin de exaltar la utilidad del mismo en el cálculo actuarial de pensiones y planes de beneficios.

2. Hipótesis y bases de cálculo

Las hipótesis utilizadas a lo largo del cálculo pueden ser agrupadas en las siguientes categorías:

2.1 Hipótesis Poblacionales

- *Edad del individuo a la fecha de cálculo (x)*. Que permitirá obtener los valores de las variables tanto actuariales como financieras para el sujeto en estudio.

$$\text{fecha actual} = da/ma/aa$$

$$\text{nacimiento} = dn/mn/an$$

$$x = \text{redondeo} \left((aa - an) + \frac{ma - mn}{12} + \frac{da - dn}{365} \right)$$

- *Edad del individuo a la fecha de contratación (y)*. Este valor permitirá, entre otras cosas calcular la antigüedad que el individuo tiene en la Institución a la fecha de cálculo.

$$\text{contratación} = dc/mc/ac$$

$$y = \text{redondeo} \left((ac - an) + \frac{mc - mn}{12} + \frac{dc - dn}{365} \right)$$

- *Edad del individuo a la jubilación (w)*. Con este valor será posible determinar el momento en el que el individuo tendrá derecho a cobrar el beneficio por jubilación así como el número de años en que el titular podría recibir, si abandonara la población activa antes de ese momento, los beneficios correspondientes por cualquiera de los decrementos posibles restantes (invalidez, muerte, separación, despido,...).
- *Antigüedad del individuo en la Institución a la fecha de cálculo (ant)*. Con este valor será posible determinar el beneficio al que tendrá derecho el individuo o en su caso, sus beneficiarios.

$$ant = x - y$$

- *Requisitos para cobrar alguna pensión (θ_s)*. Requisitos mínimos de antigüedad y/o edad para tener derecho al cobro del beneficio con motivo de la salida del grupo activo por causa del decremento s .
- *Salario a la fecha de cálculo (S_x)*. Este valor es la base para calcular los montos de las pensiones a que tendrán derecho tanto el titular como sus beneficiarios, es decir, representa el monto con el que

se cotiza al sistema.

2.2 Hipótesis Biométricas

- *Tabla de decrementos múltiples para la población activa.* Contiene las probabilidades más importantes para efecto de las proyecciones de la población que servirán para determinar:

1. Vector del número de individuos que continúan activos y con vida (l_x):

$$l_{x+1} = l_x - dt_x$$

cabe mencionar que, para efectos de este cálculo se considerará que los individuos al alcanzar la edad de jubilación (w) abandonarán la Institución, por lo que se cumple lo mostrado a continuación:

$$l_{w+1} = 0$$

2. Número total de salidas de la población activa originada por n decrementos posibles (dt_x):

$$dt_x = l_x * \left(\sum_{s=1}^n qs_x \right)$$

$$dt_x = \sum_{s=1}^n ds_x$$

al igual que en el caso del número de activos con vida, se cumple lo siguiente a edad w :

$$dt_w = l_w$$

3. Número de salidas de la población por causa del decremento s (ds_x), excluyendo el caso de jubilación:

$$ds_x = l_x * qs_x$$

donde qs_x es la probabilidad de que un individuo de edad x salga de la población activa por el decremento s .

- *Tabla de mortalidad para la población pensionada por el decremento s.* Tabla de mortalidad construída para cada uno de los decrementos que permitirá calcular lo siguiente:

1. Vector del número de pensionados por el decremento s que continúan con vida (l_x^{ps}):

$$l_{x+1}^{ps} = l_x^{ps} - d_x^{ps}$$

2. Número de pensionados por el decremento s muertos por año:

$$d_x^{ps} = l_x^{ps} * q_x^{ps}$$

- *Tabla de mortalidad para los beneficiarios.* Para efectos de este cálculo, se considerará como beneficiarios únicos a las viudas que sobrevivan a los titulares, obteniendo así los siguientes valores:

1. Vector del número de beneficiarios que continúan con vida (l_x^b):

$$l_{x+1}^b = l_x^b - d_x^b$$

2. Número de beneficiarios muertos por año:

$$d_x^b = l_x^b * q_x^b$$

- *Tabla de edades de los beneficiarios ($edadbenef(x)$).* Esta tabla se utilizará para estimar las edades de los beneficiarios de acuerdo a la edad de muerte del titular y puede estar ajustada a la experiencia de la Institución. Con estos datos será posible determinar las probabilidades de vida de los beneficiarios y así, los años en que recibirán pensión después de la muerte del titular.
- *Proporción de casados ($propcas_x$).* Esta tabla contiene la probabilidad de que un individuo de edad x esté casado y, al igual que en el caso anterior, puede ajustarse a la experiencia de la Institución o a la información de la población en general tomando como referencia estadísticas elaboradas para estos fines como por ejemplo, los datos obtenidos en los Censos y Conteos poblacionales. Con estas probabilidades es posible estimar entonces el número de beneficiarios generados por cada titular.
- *Distribución de Nuevos Ingresos (δn_i).* Esta tabla permitirá saber de qué edades se llevan a cabo las nuevas contrataciones año con año para así calcular el nuevo grupo poblacional, es decir, el término δn_i representa la proporción de los nuevos ingresos que tendrán edad x_i . Estos datos los

proporcionará la Institución de acuerdo a su experiencia laboral.

- *Hipótesis Demográfica* (ΔP_j). Tasa que representa el ritmo de crecimiento que se observará en la población año con año al considerar las nuevas contrataciones.

2.3 Hipótesis Financieras

- *Incremento salarial.* (ΔSS) Vector que representa los incrementos salariales que impactarán tanto a los salarios de la población activa, como a las pensiones a las que tengan derecho tanto el titular como sus beneficiarios, si así lo estipulara la Institución, es decir:

$$\Delta S_i = \begin{cases} 1 & \text{para } i = 1 \\ \prod_{k=1}^i (1 + \delta S_k) & \text{para } i > 1 \end{cases}$$

y en caso de que los incrementos sean iguales año con año:

$$\Delta S_i = (1 + \delta S_k)^{i-1}$$

en donde δS_k representa la tasa de incremento salarial para el año de cobro k , obteniendo así el siguiente vector:

$$\Delta SS = \begin{pmatrix} \Delta S_1 \\ \Delta S_2 \\ \dots \\ \Delta S_n \end{pmatrix}$$

- *Tasa de interés.* (t_k) Tasa que permitirá encontrar el valor presente de los montos a ser pagados cada año utilizando el siguiente factor de descuento para los pagos efectuados en el año i :

$$V_i = \begin{cases} 1 & \text{para } i = 1 \\ \frac{1}{\prod_{k=1}^{i-1} (1+t_k)} & \text{para } i > 1 \end{cases}$$

en donde t_k representa el valor de la tasa de interés para el año de cálculo k . En caso de que las tasas de interés sean constantes año con año ($t_1 = t_2 = \dots$):

$$V_i = \frac{1}{(1 + t_i)^{i-1}}$$

3. Metodología

Para efectos de este cálculo se definirá primeramente un vector que contendrá la información de la población actual agrupada de acuerdo a sus edades a la fecha de cálculo (x) y sus antigüedades (ant) a la misma fecha con la siguiente estructura:

$$T = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \dots \\ t_g \end{pmatrix}$$

en donde g es el número total de grupos formados a partir de la población original y el término t_i representa el número de individuos agrupados en el grupo i con edad a la fecha de cálculo x_i y antigüedad a la misma fecha ant_i .

Partiendo de este vector se construirá una matriz poblacional en donde la primera columna serán justamente los elementos del vector T y las siguientes representarán el número de individuos de cada grupo que quedan con vida los años posteriores de la siguiente forma:

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,n} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \dots & m_{2,n} \\ \dots & & & \dots \\ m_{g,1} & m_{g,2} & \dots & m_{g,n} \end{pmatrix}$$

donde:

$$m_{i,j} = \begin{cases} t_i & \text{para } j = 1 \\ m_{i,1} * \frac{l_{x_i+j-1}}{l_{x_i}} & \text{para } 1 < j \leq w - x_i + 1 \\ 0 & \text{para } j > w - x_i + 1 \end{cases}$$

y n es el número de años en que se extinguirá la población activa.

De esta forma el número total de individuos que continúan en la población activa año con año está representada por la siguiente suma para el año j -ésimo:

$$Num_j = \sum_{i=1}^g m_{ij}$$

Siguiendo la misma estructura para la formación del vector T , se generará también un vector que contenga los datos de los promedios salariales mensuales para cada grupo formado con la siguiente estructura:

$$SP = \begin{pmatrix} sp_1 \\ sp_2 \\ \dots \\ sp_g \end{pmatrix}$$

A partir de todo lo anterior se procede a hacer el cálculo del número de pensionados, monto de las pensiones, número de beneficiarios y monto de las pensiones para los mismos de acuerdo al decremento deseado, pudiendo separar éstos, de acuerdo a las características del beneficio otorgado, en diferentes tipos, como por ejemplo:

3.1 Pensiones a los titulares y sus beneficiarios.

3.2 Pensiones a partir de la edad de jubilación (w) y beneficiarios.

3.3 Pensiones a los beneficiarios por muerte de activos.

3.4 Pagos Únicos.

3.1 Pensiones a los titulares y sus beneficiarios

En este caso se calcularán tanto los números de pensionados como los montos que erogará la Institución con motivo del pago de sus pensiones y el número de beneficiarios que se generarán con motivo de la muerte de los pensionados titulares y las pensiones que recibirán éstos año con año.

Para comenzar es necesario calcular el número de salidas que se llevarán a cabo año con año de la población original por cada uno de los decrementos s en que se generan pensionados titulares (exceptuando el caso jubilación) mutiplicando cada una de las columnas de la matriz M por las correspondientes probabilidades q_{s_x} obteniendo la siguiente matriz:

$$PD = \begin{pmatrix} pd_{1,1} & pd_{1,2} & \dots & pd_{1,n} \\ pd_{2,1} & pd_{2,2} & \dots & pd_{2,n} \\ \dots & & & \dots \\ pd_{g,1} & pd_{g,2} & \dots & pd_{g,n} \end{pmatrix}$$

en donde:

$$pd_{ij} = \begin{cases} m_{ij} * qs_{x_i+j-1} & \text{para } j < w - x_i + 1 \\ 0 & \text{para } j \geq w - x_i + 1 \end{cases}$$

Así, el número de pensionados que empiezan a cobrar sus beneficios justo en el año j –ésimo se representa con la siguiente suma:

$$P_j = \sum_{i=1}^g pd_{ij}$$

Partiendo de esta matriz se procede a calcular el número de pensionados que quedarán con vida los años posteriores obteniendo n matrices para cada una de las cohortes de pensionados con la siguiente estructura:

$$PP^a = \begin{pmatrix} pp_{1,1}^a & pp_{1,2}^a & \dots & pp_{1,k}^a \\ pp_{2,1}^a & pp_{2,2}^a & \dots & pp_{2,k}^a \\ \dots & & & \dots \\ pp_{g,1}^a & pp_{g,2}^a & \dots & pp_{g,k}^a \end{pmatrix}$$

en donde a representa la cohorte de pensionados de la cual se está calculando las muertes año con año ($a = 1, 2, \dots, n$), k es el número de años en que se calcularán las muertes y en donde cada elemento $pp_{i,j}^a$ se compone de la siguiente forma:

$$pp_{i,j}^a = \begin{cases} 0 & \text{para } j < a \\ pd_{ij} & \text{para } j = a \\ pd_{i,a} * \frac{l_{x_i+j-1}^{ps}}{l_{x_i+a-1}^{ps}} & \text{para } j > a \end{cases}$$

Una vez habiendo calculado las n matrices PP^a se lleva a cabo la siguiente suma de matrices:

$$\begin{aligned}
 PT &= \sum_{a=1}^n PP^a \\
 &= \begin{pmatrix} PP_{1,1}^1 & PP_{1,2}^1 & \dots & PP_{1,k}^1 \\ PP_{2,1}^2 & PP_{2,2}^2 & \dots & PP_{2,k}^2 \\ \dots & & & \dots \\ PP_{g,1}^n & PP_{g,2}^n & \dots & PP_{g,k}^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & PP_{1,2}^2 & \dots & PP_{1,k}^2 \\ 0 & PP_{2,2}^2 & \dots & PP_{2,k}^2 \\ \dots & & & \dots \\ 0 & PP_{g,2}^2 & \dots & PP_{g,k}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & PP_{1,3}^3 & \dots & PP_{1,k}^3 \\ 0 & 0 & PP_{2,3}^3 & \dots & PP_{2,k}^3 \\ \dots & & & & \dots \\ 0 & 0 & PP_{g,3}^3 & \dots & PP_{g,k}^3 \end{pmatrix} + \dots
 \end{aligned}$$

obteniendo así la siguiente matriz que representa el total de pensionados que se tendrán año con año cobrando el beneficio correspondiente, considerando tanto a los individuos que comienzan a cobrar su pensión en el año j –ésimo, como a los que quedan con vida de los demás grupos en ese mismo año, es decir:

$$PT = \begin{pmatrix} pt_{1,1} & pt_{1,2} & \dots & pt_{1,k} \\ pt_{2,1} & pt_{2,2} & \dots & pt_{2,k} \\ \dots & & & \dots \\ pt_{g,1} & pt_{g,2} & \dots & pt_{g,k} \end{pmatrix}$$

De esta forma, el número total de pensionados en el año j –ésimo se representa de la siguiente forma:

$$PT_j = \sum_{i=1}^g pt_{i,j}$$

Para calcular el monto de las pensiones a las que tendrán derecho estos pensionados es necesario construir nuevas matrices que irán en relación directa a las de las cohortes de pensionados y por lo tanto conservarán un comportamiento similar. Para efectos de este cálculo se considerará que el beneficio otorgado a los trabajadores una vez pensionados representa un porcentaje del último sueldo que percibieron estando activos. Sin embargo, puede sustituirse este beneficio por cualquier otro en caso de ser necesario y únicamente se aplicará a éste los incrementos correspondientes. Cabe mencionar que para efectos de este cálculo se contemplará también que las pensiones se incrementan de acuerdo al aumento salarial que afecta los sueldos de la población activa, pudiendo ser sustituido, al igual que en el caso del beneficio, por cualquier otro en caso de ser necesario sin pérdida de generalidad.

Primeramente, se genera la matriz de pensiones para los individuos que comienzan a cobrarlas

justo en el año j –ésimo a partir de la matriz PD construída anteriormente, de la siguiente forma:

$$PMD = \begin{pmatrix} pmd_{1,1} & pmd_{1,2} & \dots & pmd_{1,n} \\ pmd_{2,1} & pmd_{2,2} & \dots & pmd_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ pmd_{g,1} & pmd_{g,2} & \dots & pmd_{g,n} \end{pmatrix}$$

en donde los elementos tienen la siguiente composición:

$$pmd_{ij} = pd_{ij} * \% * sp_i * \Delta S_j * 12$$

En seguida se procede a calcular, al igual que en el número de pensionados, n matrices que representan los pagos que se irán efectuando a cada una de las cohortes de pensionados conforme éstos vayan quedando con vida de acuerdo a lo siguiente:

$$PMP^a = \begin{pmatrix} pmp_{1,1}^a & pmp_{1,2}^a & \dots & pmp_{1,k}^a \\ pmp_{2,1}^a & pmp_{2,2}^a & \dots & pmp_{2,k}^a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ pmp_{g,1}^a & pmp_{g,2}^a & \dots & pmp_{g,k}^a \end{pmatrix}$$

con:

$$pmp_{ij}^a = \begin{cases} 0 & \text{para } j < a \\ pmd_{ij} & \text{para } j = a \\ pp_{ij}^a * \frac{pmd_{i,a}}{pd_{i,a}} * \Delta S_{j-a+1} & \text{para } j > a \end{cases}$$

De esta forma, el monto total de las pensiones a ser pagadas cada año se representa con la siguiente suma de matrices:

$$PMT = \sum_{a=1}^n PMP^a = \begin{pmatrix} pmt_{1,1} & pmt_{1,2} & \dots & pmt_{1,k} \\ pmt_{2,1} & pmt_{2,2} & \dots & pmt_{2,k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ pmt_{g,1} & pmt_{g,2} & \dots & pmt_{g,k} \end{pmatrix}$$

y así, el monto total a ser pagado por la Institución por concepto de las pensiones en el año j es:

$$PMT_j = \sum_{i=1}^g pmt_{ij}$$

A partir de las matrices anteriormente calculadas es posible evaluar ahora el número de beneficiarios y los montos de las pensiones a ser pagadas a los mismos una vez que el titular haya fallecido. Es necesario tener en mente que, por cada cohorte de pensionados muertos se considerará un grupo de beneficiarios que, al igual que el de los titulares, irá disminuyendo año con año con motivo de su muerte.

Primeramente, se construirán n matrices cuyos términos representarán el número de pensionados fallecidos en cada cohorte a de la siguiente forma:

$$BD^a = \begin{pmatrix} bd_{1,1}^a & bd_{1,2}^a & \dots & bd_{1,k}^a \\ bd_{2,1}^a & bd_{2,2}^a & \dots & bd_{2,k}^a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ bd_{g,1}^a & bd_{g,2}^a & \dots & bd_{g,k}^a \end{pmatrix}$$

en donde:

$$bd_{ij}^a = \begin{cases} 0 & \text{para } j < a \\ pmp_{ij}^a - pmp_{i,j+1}^a & \text{para } j \geq a \end{cases}$$

es el número de pensionados muertos del grupo i dentro de la cohorte a en el j -ésimo año.

Una vez obteniendo esta matriz, es necesario construir una nueva en donde se obtenga el número de beneficiarios por pensionados muertos (cabe mencionar que para efectos de este cálculo se considerarán como únicos beneficiarios a las esposas de los titulares de acuerdo a las probabilidades de que éstos estén casados ($propcas_x$)). Así, se obtiene lo que a continuación se muestra:

$$B^a = \begin{pmatrix} b_{1,1}^a & b_{1,2}^a & \dots & b_{1,k}^a \\ b_{2,1}^a & b_{2,2}^a & \dots & b_{2,k}^a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{g,1}^a & b_{g,2}^a & \dots & b_{g,k}^a \end{pmatrix}$$

con:

$$b_{ij}^a = \begin{cases} 0 & \text{para } j < a \\ bd_{ij}^a * propcas_{x_i+j-1} & \text{para } j \geq a \end{cases}$$

Partiendo de cada una de estas matrices B^a ($a = 1, 2, \dots, n$) es necesario construir h matrices ($h = 1, 2, \dots, k$) de cohortes de beneficiarios para cada una que se irán extinguiendo v años conforme a lo siguiente:

$$BP^{a,h} = \begin{pmatrix} bp_{1,1}^{a,h} & bp_{1,2}^{a,h} & \dots & bp_{1,v}^{a,h} \\ bp_{2,1}^{a,h} & bp_{2,2}^{a,h} & \dots & bp_{2,v}^{a,h} \\ \dots & & & \dots \\ bp_{g,1}^{a,h} & bp_{g,2}^{a,h} & \dots & bp_{g,v}^{a,h} \end{pmatrix}$$

en donde:

$$bp_{ij}^{a,h} = \begin{cases} 0 & \text{para } j < a + h - 1 \\ b_{ij}^a & \text{para } j = a + h - 1 \\ b_{i,a+h-1}^a * \frac{l_{edadbenef(x_i+a-1+h-1)+j-(a+h-1)}^b}{l_{edadbenef(x_i+a-1+h-1)}^b} & \text{para } j > a + h - 1 \end{cases}$$

Según lo anterior, el número total de beneficiarios a los cuales se les pagará una pensión año con año para la cohorte a se calcula con la siguiente fórmula:

$$BT^a = \sum_{h=1}^k BP^{a,h}$$

y el número total de beneficiarios que recibirán pensión año con año para la población en general es:

$$\begin{aligned}
BT &= \sum_{a=1}^n BT^a \\
&= \begin{pmatrix} bt_{1,1} & bt_{1,2} & \dots & bt_{1,v} \\ bt_{2,1} & bt_{2,2} & \dots & bt_{2,v} \\ \dots & & & \dots \\ bt_{g,1} & bt_{g,2} & \dots & bt_{g,v} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Así, el número de beneficiarios que recibirán su beneficio en el año j es:

$$BT_j = \sum_{i=1}^g bt_{i,j}$$

El siguiente paso consiste en calcular las matrices que permitirán conocer los montos de las pensiones a ser pagados y por lo tanto, reservados por la Institución en cuestión, para hacer frente a las obligaciones establecidas con los beneficiarios. Para esto se calcularán h matrices ($h = 1, 2, \dots, k$) que contendrán los valores de las pensiones a ser pagadas a los beneficiarios de cada cohorte de la siguiente forma:

$$BMP^{a,h} = \begin{pmatrix} bmp_{1,1}^{a,h} & bmp_{1,2}^{a,h} & \dots & bmp_{1,v}^{a,h} \\ bmp_{2,1}^{a,h} & bmp_{2,2}^{a,h} & \dots & bmp_{2,v}^{a,h} \\ \dots & & & \dots \\ bmp_{g,1}^{a,h} & bmp_{g,2}^{a,h} & \dots & bmp_{g,v}^{a,h} \end{pmatrix}$$

con:

$$bmp_{i,j}^{a,h} = \begin{cases} 0 & \text{para } j < a + h - 1 \\ bp_{i,j}^{a,h} * \% * \frac{ppm_{i,j}^a}{pp_{i,j}^a} & \text{para } j = a + h - 1 \\ bp_{i,j}^{a,h} * \frac{bmp_{i,a+h-1}^{a,h}}{bp_{i,a+h-1}^{a,h}} * \Delta S_{j-(a+h-1)+1} & \text{para } j > a + h - 1 \end{cases}$$

De esta forma los montos a ser pagados por concepto de pensiones a los beneficiarios de la cohorte a año con año se representa de la siguiente forma:

$$BMT^a = \sum_{h=1}^k BMP^{a,h}$$

y los montos a ser pagados a los beneficiarios en general son:

$$BMT = \sum_{a=1}^n BMT^a = \begin{pmatrix} bmt_{1,1} & bmt_{1,2} & \dots & bmt_{1,v} \\ bmt_{2,1} & bmt_{2,2} & \dots & bmt_{2,v} \\ \dots & & & \dots \\ bmt_{g,1} & bmt_{g,2} & \dots & bmt_{g,v} \end{pmatrix}$$

Así, las pensiones totales a ser pagadas a los beneficiarios en el j –ésimo año son:

$$BMT_j = \sum_{i=1}^g bmt_{i,j}$$

3.2 Pensiones a partir de la edad de jubilación (w) y beneficiarios.

El cálculo para este beneficio es prácticamente igual que en el caso anterior, la única matriz que difiere por su composición es la matriz PD que contiene el número de salidas, en este caso, de jubilados que se generan año con año. Esta matriz se compone ahora de la siguiente forma:

$$PD = \begin{pmatrix} pd_{1,1} & pd_{1,2} & \dots & pd_{1,n} \\ pd_{2,1} & pd_{2,2} & \dots & pd_{2,n} \\ \dots & & & \dots \\ pd_{g,1} & pd_{g,2} & \dots & pd_{g,n} \end{pmatrix}$$

en donde:

$$pd_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{para } j \neq w - x_i + 1 \\ m_{i,j} & \text{para } j = w - x_i + 1 \end{cases}$$

De esta forma, los individuos que empiezan a cobrar su pensión en el j –ésimo año están

representados por la siguiente fórmula:

$$P_j = \sum_{i=1}^g pd_{i,j}$$

Para obtener todas las matrices deseadas que contengan, tanto el número total de pensionados como los montos de sus pensiones y el número de beneficiarios y el total de las pensiones para éstos, es necesario seguir todos y cada uno de los pasos expuestos en la parte 4.1.

3.3 Pensiones a los beneficiarios por muerte de activos

En este caso el cálculo se realiza igual que en el punto 4.1 hasta llegar a la construcción de las matrices PP^a que ya no se llevará a cabo, es decir, a partir de la matriz PD se procederá a generar únicamente una matriz B^1 que tendrá una estructura diferente a las n construídas para el caso 4.1 de la siguiente forma:

$$B^1 = \begin{pmatrix} b_{1,1}^1 & b_{1,2}^1 & \dots & b_{1,k}^1 \\ b_{2,1}^1 & b_{2,2}^1 & \dots & b_{2,k}^1 \\ \dots & & & \dots \\ b_{g,1}^1 & b_{g,2}^1 & \dots & b_{g,k}^1 \end{pmatrix}$$

donde:

$$b_{i,j}^1 = \begin{cases} 0 & \text{para } j < a \\ pd_{i,j}^1 * propcas_{x_i+j-1} & \text{para } j \geq a \end{cases}$$

A partir de esta matriz se genera un sólo conjunto de matrices $BP^{1,h}$ ($h = 1, 2, \dots, k$) con la misma estructura presentada en el punto 4.1.

De igual manera, el cálculo de las matrices PMP^a no se llevará a cabo y las matrices $BMP^{a,h}$ tendrán la siguiente estructura:

$$BMP^{a,h} = \begin{pmatrix} bmp_{1,1}^{a,h} & bmp_{1,2}^{a,h} & \dots & bmp_{1,v}^{a,h} \\ bmp_{2,1}^{a,h} & bmp_{2,2}^{a,h} & \dots & bmp_{2,v}^{a,h} \\ \dots & & & \dots \\ bmp_{g,1}^{a,h} & bmp_{g,2}^{a,h} & \dots & bmp_{g,v}^{a,h} \end{pmatrix}$$

en donde:

$$bmp_{ij}^{a,h} = \begin{cases} 0 & \text{para } j < a + h - 1 \\ bp_{ij}^{a,h} * \% * \frac{pmd_{ij}}{pd_{ij}} & \text{para } j = a + h - 1 \\ bp_{ij}^{a,h} * \frac{bmp_{i,a+h-1}^{a,h}}{bp_{i,a+h-1}^{a,h}} * \Delta S_{j-(a+h-1)+1} & \text{para } j > a + h - 1 \end{cases}$$

La suma de estas matrices se lleva a cabo exactamente igual a lo presentado en el apartado 4.1 del presente estudio.

3.4 Pagos Únicos

Para el cálculo de este beneficio se construye la matriz PD que puede contar, en caso de ser requerido, con algún requisito (θ_s) para tener derecho a cobrar el pago único correspondiente siguiendo la estructura que a continuación se presenta:

$$PD = \begin{pmatrix} pd_{1,1} & pd_{1,2} & \dots & pd_{1,n} \\ pd_{2,1} & pd_{2,2} & \dots & pd_{2,n} \\ \dots & & & \dots \\ pd_{g,1} & pd_{g,2} & \dots & pd_{g,n} \end{pmatrix}$$

en donde:

$$pd_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{para } j < \theta_s + 1 \\ m_{ij} * qs_{x_i+j-1} & \text{para } \theta_s + 1 \leq j < w - x_i + 1 \\ 0 & \text{para } j \geq w - x_i + 1 \end{cases}$$

De esta forma el número total de pagos únicos a ser pagados en el año j corresponde a la suma:

$$P_j = \sum_{i=1}^g pd_{ij}$$

A partir de esto se genera la matriz PMD :

$$PMD = \begin{pmatrix} pmd_{1,1} & pmd_{1,2} & \dots & pmd_{1,n} \\ pmd_{2,1} & pmd_{2,2} & \dots & pmd_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ pmd_{g,1} & pmd_{g,2} & \dots & pmd_{g,n} \end{pmatrix}$$

cuyos elementos tendrán la siguiente composición:

$$pmd_{ij} = pd_{ij} * \% * sp_i * \Delta S_j$$

y así, al igual que en el caso del número de pagos únicos, el monto total correspondiente a los pagos únicos a ser pagados en el j -ésimo año es:

$$PMT_j = \sum_{i=1}^g pmd_{ij}$$

3.5 Cálculo de nuevas cohortes

Para llevar a cabo el cálculo de nuevas cohortes es necesario contemplar tanto el número de salidas que se llevan a cabo por todas las posibles causas o decrementos (s) como el incremento poblacional que se espera observar año con año (ΔP_j).

Primeramente se contruye una matriz triangular superior que tiene la siguiente estructura:

$$NM = \begin{pmatrix} nm_{1,1} & nm_{1,2} & \dots & nm_{1,n} \\ 0 & nm_{2,2} & \dots & nm_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & nm_{n,n} \end{pmatrix}$$

en donde el primer renglón ($i = 1$) representa el número total de individuos que continúan en la población activa original de la matriz M de la siguiente forma:

$$nm_{1,j} = Num_j = \sum_{i=1}^g m_{i,j}$$

mientras que los elementos de la diagonal ($i > 1$ con $i = j$) se componen de la siguiente manera:

$$nm_{i,j} = \sum_{i=1}^{j-1} (nm_{i,j-1} - nm_{i,j}) + \left(\sum_{i=1}^n nm_{i,j-1} \right) * \Delta P_{j-1}$$

representando el número de individuos que deberán ser contratados en el año j con el fin de obtener el crecimiento poblacional deseado año con año o, en caso de no contar con éste, mantener el número poblacional constante.

Cada uno de los elementos a la derecha de la diagonal son el resultado de n matrices auxiliares que deben construirse con el fin de determinar la distribución que tendrán las nuevas contrataciones y por consiguiente sus edades y probabilidades de vida a través del tiempo.

Así, para calcular el elemento $nm_{u,j}$ con $u > j$ y $j \neq 1$ es necesario generar la siguiente matriz auxiliar:

$$AUX^u = \begin{pmatrix} aux_{1,1}^u & aux_{1,2}^u & \dots & aux_{1,n}^u \\ aux_{2,1}^u & aux_{2,2}^u & \dots & aux_{2,n}^u \\ \dots & & & \dots \\ aux_{z,1}^u & aux_{z,2}^u & \dots & aux_{z,n}^u \end{pmatrix}$$

en donde los términos de la primera columna ($j = 1$) se calculan partiendo del término de la diagonal $nm_{u,u}$ de acuerdo a la distribución estimada para los nuevos ingresos (δn_i) y los de las siguientes columnas ($j > 1$) representan a los individuos que van quedando con vida de los z grupos generados por el vector de distribución de las nuevas cohortes de la siguiente forma:

$$aux_{i,j}^u = \begin{cases} nm_{u,u} * \delta n_i & \text{para } j = 1 \\ aux_{i,1}^u * \frac{l_{x_i+j-1}}{l_{x_i}} & \text{para } j > 1 \end{cases}$$

De esta forma:

$$nm_{u,j} = \sum_{i=1}^z aux_{i,j-u+1}^u$$

Una vez obteniendo la matriz NM se procede a formar los nuevos vectores T para cada una de las f cohortes ($f = 1, 2, \dots, n$) conservando la misma estructura que en el caso de la población original de la siguiente forma:

$$fT = \begin{pmatrix} ft_1 \\ ft_2 \\ \dots \\ ft_z \end{pmatrix}$$

en donde:

$$ft_i = nm_{ff} * \delta n_i$$

De igual manera se genera el vector fSP para cada cohorte con los datos de los salarios de contratación mensuales promedio para cada grupo formado (fsp_i con $i = 1, 2, \dots, z$) proporcionados por la Institución y con la siguiente estructura:

$$fSP = \begin{pmatrix} fsp_1 * \Delta S_f \\ fsp_2 * \Delta S_f \\ \dots \\ fsp_z * \Delta S_f \end{pmatrix}$$

Posteriormente se realiza el cálculo de los beneficios deseados para cada una de las f cohortes siguiendo la misma metodología que se siguió para el vector T de la población original, obteniéndose así las matrices de interés para cada una de ellas.

Cabe mencionar que para efectos de presentar los resultados totales de las nuevas cohortes se deberá hacer la suma desfasada de las matrices resultantes, por ejemplo, para obtener el número total de individuos que continúan en la población activa año con año primeramente se obtendrán las f matrices poblacionales M con la misma estructura explicada al principio de esta metodología y se sumarán de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
MNI = & \left(\begin{array}{cccc} 1m_{1,1} & 1m_{1,2} & 1m_{1,3} & \dots & 1m_{1,n_1} \\ 1m_{2,1} & 1m_{2,2} & 1m_{2,3} & \dots & 1m_{2,n_1} \\ \dots & & & & \\ 1m_{g,1} & 1m_{g,2} & 1m_{g,3} & \dots & 1m_{g,n_1} \end{array} \right) + \\
& \left(\begin{array}{cccc} 2m_{1,1} & 2m_{1,2} & \dots & 2m_{1,n_2} \\ 2m_{2,1} & 2m_{2,2} & \dots & 2m_{2,n_2} \\ \dots & & & \\ 2m_{g,1} & 2m_{g,2} & \dots & 2m_{g,n_2} \end{array} \right) + \\
& \left(\begin{array}{cccc} 3m_{1,1} & \dots & 3m_{1,n_3} \\ 3m_{2,1} & \dots & 3m_{2,n_3} \\ \dots & & \\ 3m_{g,1} & \dots & 3m_{g,n_3} \end{array} \right) + \\
& \dots\dots
\end{aligned}$$

Así se obtiene una sola matriz *MNI* que contiene el número total de individuos que se encuentran en la población activa como producto de nuevas contrataciones llevadas a cabo año con año.

Esto mismo se debe hacer con las matrices que contienen los resultados totales por cohorte (*fPT, fPMT, fBT, fBMT*) con el fin de obtener las matrices *PTNI, PMTNI, BTNI* y *BMTNI* que contengan los resultados totales para las nuevas cohortes.

3.6 Consideraciones generales

Con el fin de obtener los valores de los montos a valor presente, basta con multiplicar los términos de las matrices que contienen los resultados totales de la población (*PMT, BMT, PMTNI* y *BMTNI*) por el correspondiente factor de descuento de acuerdo a la columna en donde estén ubicados, es decir, para los resultados en la columna *j* –ésima el factor utilizado deberá ser V_j .

En caso de existir algún requisito particular de edad y/o antigüedad (θ_s) para tener derecho a algún beneficio, el cálculo de las matrices que contienen los números de pensionados, beneficiarios y los montos de los beneficios para ambos expuesto a lo largo de esta metodología permanece igual, únicamente los resultados empezarán a partir de que $j \geq \theta_s + 1$, es decir, los términos serán 0 para $j < \theta_s + 1$. Por ejemplo, los términos de la matriz *PD* se definirán como se estableció en el punto 3.4 (Pagos Únicos) y de ahí en adelante el cálculo se lleva a cabo de igual manera.

4. Conclusiones

Como se demostró a lo largo de este estudio, el Método de Proyecciones Demográficas y Financieras a población abierta con enfoque matricial permite obtener de una manera más clara y precisa tanto el flujo poblacional año con año como los montos a ser pagados y por lo tanto reservados por la Institución para hacer frente a las obligaciones correspondientes.

Al obtener matrices para todas las cohortes, este método permite no únicamente hacer análisis sobre los montos y números totales sino también por cohorte y por características poblacionales (edad, antigüedad, etc) para identificar así posibles áreas de oportunidad en el diseño de los planes de beneficios con lo que se permita garantizar un resultado óptimo tanto para la Institución como para sus trabajadores.

Lo anterior también permite tener un panorama más claro del comportamiento demográfico de la población en estudio para detectar así situaciones extremas en donde la población presente algún flujo que genere cambios sustanciales en los recursos laborales y que requieran, para ser resueltos eficientemente, de alguna toma de decisión por parte de los Directivos de la Institución.

De igual manera, al obtener el desglose de los montos correspondientes año con año es posible calcular con mayor exactitud y precisión los valores actuariales de interés como el Valor Presente de las Obligaciones ya que, en lugar de hacer uso como comúnmente se hace para estos fines del cálculo de anualidades, basta con hacer sumas de los números de interés finales para obtener resultados que permitan llevar a cabo un mejor análisis financiero.

Adicionalmente, este desglose permite evaluar los resultados en escenarios económicos diferentes ya que, al obtener los flujos año con año únicamente es necesario emplear las tasas de interés correspondientes para obtener los datos deseados bajo situaciones económicas variadas.

Como se puede observar uno de los valores agregados más importantes al emplear este método es que permite simplificar cálculos sin importar la magnitud de la población laboral al agrupar a la misma de acuerdo a sus características más importantes, evitando así gran número de cálculos individuales que impliquen mayor tiempo y esfuerzo.

Otro beneficio de gran importancia proporcionado por este método es permitir que el análisis de los resultados finales se lleve a cabo de una manera más sencilla y eficiente ya que, al representar los cálculos en forma matricial, la simple visualización de los mismos hace posible detectar, en varias ocasiones, áreas que requieran de una mayor investigación.

Por todo lo anterior, el método aquí expuesto es ampliamente recomendable para obtener un panorama financiero en cuanto a planes de beneficios por un largo o mediano plazo y garantiza la obtención clara y comprensible de resultados que faciliten un análisis exhaustivo y la toma de decisiones óptimas en bienestar de la Institución.

5. Glosario

<i>Variable</i>	<i>Definición</i>
x	Edad del individuo a la fecha de cálculo.
S_x	Salario a la fecha de cálculo.
y	Antigüedad en la Institución a la fecha de cálculo.
w	Edad de jubilación.
θ_s	Requisitos mínimos para el cobro del beneficio por el decremento s .
l_x	Vector del número de individuos que continúan activos y con vida.
ds_x	Número de salidas de la población por causa del decremento s .
dt_x	Número total de salidas de la población activa.
qs_x	Valores de la tabla de mortalidad para el decremento s .
l_x^{ps}	Número de pensionados por el decremento s que continúan con vida.
d_x^{ps}	Número de pensionados por el decremento s muertos por año.
l_x^b	Número de beneficiarios que continúan con vida.
d_x^b	Número de beneficiarios muertos por año.
$edadbenef(x)$	Edad de la viuda de acuerdo a la edad de muerte del titular (x).
$propcas_x$	Probabilidad de que un individuo de edad x esté casado.
δn_i	Proporción de los nuevos ingresos que tendrán edad de contratación x_i .
ΔP_j	Incremento poblacional esperado para el año j .
ΔS_i	Vector de incrementos salariales.
V_i	Factor de descuento.
T	Vector poblacional inicial por grupos.
g	Número de grupos formados a partir de la población original.
M	Matriz poblacional a través del tiempo a partir de T .
n	Número de años en que se extinguirá la población activa.
Num_j	Número de individuos que continúan en la población activa en el año j –ésimo.
SP	Vector con los salarios promedio por grupo.
PD	Matriz del número de salidas por año.
P_j	Número de pensionados que empiezan a cobrar sus beneficio justo en el año j .
PP^a	Matriz con el comportamiento poblacional de la cohorte de pensionados a .
PT	Matriz con el comportamiento demográfico de la población total de pensionados.
PT_j	Número total de pensionados en el año j .

<i>Variable</i>	<i>Definición</i>
k	Número de años en que se extinguirán los pensionados
PMD	Matriz con los montos anuales a ser pagados a los pensionados que empiezan a cobrar su pensión justo en el año j .
PMP^a	Matriz con los montos anuales a ser pagados a los pensionados de la cohorte a año con año.
PMT	Matriz conteniendo los montos totales anuales a ser pagados por concepto del beneficio en cuestión
PMT_j	Monto total anual a ser pagado en el año j – <i>ésimo</i> .
BD^a	Matriz de los pensionados fallecidos de la cohorte a .
B^a	Matriz con el número de beneficiarios generados por los pensionados fallecidos de la cohorte a .
$BP^{a,h}$	Matriz con el comportamiento demográfico de la cohorte h de beneficiarios a partir de las muertes producidas de la cohorte a de pensionados.
v	Número de años en que se extinguirán las cohortes de beneficiarios.
BT^a	Matriz conteniendo el número de beneficiarios total para la cohorte a de pensionados.
BT	Matriz conteniendo el número total de beneficiarios de todas las cohortes de pensionados.
BT_j	Número total de beneficiarios en el año j .
$BMP^{a,h}$	Matriz con los montos anuales a ser pagados a la cohorte h de beneficiarios a partir de las muertes producidas de la cohorte a de pensionados.
BMT^a	Matriz con los montos totales anuales a ser pagados a los beneficiarios producto de las muertes de la cohorte a de pensionados.
BMT	Matriz con el monto total anual a ser pagado a los beneficiarios de todas las cohortes de pensionados.
BMT_j	Monto total anual a ser pagado a los beneficiarios en el año j .
NM	Matriz con el comportamiento demográfico general para la población actual y las nuevas cohortes.
z	Grupos formados para las nuevas cohortes de acuerdo a la distribución de las mismas.
AUX^u	Matriz poblacional auxiliar para generar los términos del renglón u de la matriz NM .
fT	Vector poblacional inicial por grupos para la cohorte f de nuevos ingresos.
fSP	Vector con los salarios promedio por grupo para la cohorte f de nuevos ingresos.
fM	Matriz poblacional a través del tiempo para la cohorte f de nuevas contrataciones a partir de fT .

6. Bibliografía

Bowers Jr., Newton L.; Gerber, Hans U.; Hickman, James C.; Jones, Donald A.; Nesbitt, Cecil J. *Actuarial Mathematics*. The Society of Actuaries. U.S.A. 1986.

Farell Actuarios Asociados, S.C. *Términos de Referencia para la Valuación Actuarial Estandarizada de las Instituciones Estatales de Seguridad Social*. México, D.F. Mayo de 1998.

Thullen Peter. *Técnicas Actuariales de la Seguridad Social. Regímenes de las pensiones de invalidez, de vejez y de sobrevivientes*. (Organización Internacional del Trabajo, 1994). Centro de Publicaciones del Ministerio de Trabajo y Seguridad Social. Madrid, España. 1995.