MÉTHODES & MOYENS POUR CALCULER LA VALEUR NUMÉRIQUE DES OPÉRATIONS ACTUARIELLES GÉNÉRALISÉES

A la mémoire de B. Monic qui nous incita à résoudre „réellement' les problèmes non-life

Essai de synthese dans le domaine de l'Actuaire

Ed. Franckx
Bruxelles

Avertissement

Il n'y a rien de plus difficile que de surmonter les „vieilles habitudes acquises" car les modifier oblige à vaincre l'inertie. Or il est un fait que notre manière de penser résulte en grande partie de ce que nos maîtres nous ont transmis. Notre formation à l'école ou ailleurs à l'actuariat nous a coulé dans un moule. En général, nous nous plaisons à y rester. Certains s'offusquent ou répugnent à l'idée de changer quelque chose.

Mais ce n'est pas une raison pour que la recherche scientifique s'embarrasse des mêmes scrupules. Au contraire, le progrès résulte souvent de l'abandon de certaines formes traditionnelles.

Renoncer à des conditions particulières, c'est généraliser le problème et ne garder que ce qui est indispensable pour résoudre simultanément les cas spéciaux. C'est rechercher le passe-partout qui ouvre le nombre maximum de serrures particulières.

La note ci-après a pour objet de réaliser quelque chose d'analogue dans le domaine actuariel. Sa lecture sera difficile au premier abord. Il faudra la reprendre et la reprendre encore, car elle renonce à presque tout sauf au jeu, dans sa conception la plus large.

Mais, en fait, que ce soit pour un contrat ou un ensemble de contrats, le jeu se joue dans le temps et s'échelonne dans une succession de parties, il en résulte quelque chose qui est en évolution stochastique.

Le passe-partout que l'on propose est effectivement une relation générale de recurrence qui conditionne cette évolution, en moyenne. Cette méthode est générale.

Tout le reste est un peu la description fastidieuse des serrures que l'on peut ouvrir avec le même passe-partout.

Tel est en fait le vrai fondement de cette étude. Elle a pour but de révéler une unité, donc une économie de pensée. En surmontant très peu le "vieil homme", l'actuaire se rendra compte à quel point tout est simple.

Boleslaw Monic était, plus que tout autre, convaincu que l'actuaire était nécessaire dans le domaine des assurances non viagères. Mais, pour lui, ce travail devait avoir avant tout un sens pratique.

Car il convient à l'actuaire:

— de définir clairement le problème à résoudre;
— ensuite, d'établir, si nécessaire, les méthodes théoriques de résolution (ou d'adapter d'autres) qui conviennent;
— enfin, de réunir les moyens matériels qui suffisent pour terminer le calcul numérique de la solution présentée.

Nous pensons que la meilleure façon de rendre hommage à la mémoire de celui qui pensa ,,à créer quelque chose" dans le domaine non viager, est d'illustrer, sur exemples, comment l'actuaire pourrait résoudre effectivement certains problèmes pratiques. Cette note est d'ailleurs le prolongement d'un article paru dans le Bulletin des Actuaires Belges portant titre ,,Les routines d'avant projet en assurance de risques divers"; article qui participe du même but fondamental.

Plus généralement notre objectif est de définir un ensemble d'opérations actuarielles généralisées ou la même méthode théorique de résolution est applicable et ou les algorithmes de calcul à utiliser sont semblables. Ce sont donc des opérations qui ont pour l'actuaire *même structure*.

1. *La position du problème — La collectivité des risques, le jeu actuariel et ses contraintes*

La collectivité des risques

On suppose qu'on se trouve devant une *collectivité de risques divers*, qui évolue dans le temps de deux manières différentes. Pour définir cette collectivité, en toute généralité, nous introduirons les éléments suivants:

1°) le temps est *repéré par exercice*, il varie de $1 \ldots i \ldots$ à n
n sera l',,horizon'' de l'opération.

2°) le nombre de contrats de la collectivité varie d'exercice à exercice, il sera indiqué pour les nombres: $l_1 \ldots l_i \ldots l_n$

3°) le risque varie et s'aggrave dans le temps; on admet que chaque contrat amène j accidents avec la probabilité p_j^i, au cours du i^e exercice avec:

$$p_j^i \geqslant 0 \quad \sum_j p_j^i = 1$$

En particulier dans les méthodes d'avant-projet, on admettra la loi de Poisson; l'aggravation du risque sera donnée par la suite des valeurs croissantes λ_i du paramètre λ de la loi de Poisson.

$$\lambda_1 < \lambda_2 \ldots < \lambda_i < \ldots \lambda_n$$

$$\text{donc} \qquad p_j^i = e^{-\lambda_i} \frac{(\lambda_i)^j}{j!}$$

Le modèle particulier de Poisson représente une *adaptation possible de la réalité.*

Il est qualifié ,,d'avant-projet'' car il constitue une première approximation de la réalité. Le terme ,,approximation'' doit être considéré au sens large, car il suffira en pratique de choisir une loi de Poisson plus ,,dangereuse'' que la loi réelle.

Il existe donc à priori un problème préliminaire de comparaison, qui est à étudier séparément. Car, en pratique, il sera toujours nécessaire de particulariser les ,,paramètres'' du modèle qui ,,représente'' le mode réel. C'est ce modèle particulier qui permettra de conduire à bonne fin les calculs demandés.

Cependant, la théorie générale ci-après est largement indépendante de la représentation particulière de la collectivité de risque qui sera admise.

Le jeu actuariel

Tout problème actuariel (même toute opération viagère) est essentiellement un jeu, qui se joue toujours sur une collectivité déterminée de risques. Il y a deux ,,joueurs engagés''.

— le premier „joueur" est représenté par *l'ensemble de tous les contrats* appartenant à la collectivité des risques divers (en vie, on considère en général un seul contrat).
— le second „joueur" est *l'organisme d'assurance*, qui accepte d'accorder au cours d'une période de n exercices, des avantages déterminés en cas d'accident, à condition d'obtenir du premier joueur au cours de la même période certains versements fixés à priori par l'ensemble des contrats individuels.

A titre d'exemple, le premier joueur peut être représenté par un ensemble d'assurés réels, le second joueur par la Compagnie d'Assurance, c'est le problème d'assurance directe. Mais le jeu peut aussi bien être constitué par une collectivité déterminée de contrats que l'on présente à un réassureur. Dans ces conditions, le premier joueur est l'assureur direct, le second le réassureur.

Les contraintes complémentaires

1°) Il y a jeu entre deux joueurs. Il est fixé par les conditions particulières des contrats émis.
Une des conditions complémentaires que l'on peut admettre à priori — et qui est à la base des opérations viagères — est le *principe d'équité relative*.
Le modèle théorique du risque étant fixé, on admet que les engagements prévus par le jeu doivent être équitablement calculés.
Ceci exprime d'ailleurs que l'équité est *toute relative*. Elle l'est d'autant plus que le modèle est plus réel.
Il est bien certain que l'assureur direct admettra le modèle qui lui convient ou imposé par les Autorités nationales de contrôle. Mais, en général, ce même modèle ne correspondra pas au modèle adopté par le réassureur, qui lui est un assureur international.
Ces considérations indiquent que la notion d'équité n'est, en pratique, jamais *absolue*.
2°) Une seconde contrainte est imposée par la pratique. Le second joueur, c'est-à-dire l'organisme d'assurance, n'acceptera pas, en principe, l'opération proposée que *s'il est financièrement couvert*. Nous précisons cette idée de la manière suivante:
Le second joueur admettra que le jeu n'est pas seulement

équitable dans son ensemble (période de n exercices), mais également que si, au terme d'un exercice quelconque, le premier joueur met fin au contrat d'horizon n, ce joueur ne peut être *en dette* vis-à-vis de l'organisme d'assurance.

(Cette contrainte de couverture est bien connue dans le domaine viager; il conduit à l'obligation de n'accepter que des opérations conduisant à des réserves mathématiques positives)

Le problème à résoudre

Le jeu se joue donc entre deux parties, sur une collectivité spécifiée de risques et moyennant les contraintes admises. Le problème posé à l'actuaire est alors double:

1°) quel que soit le jeu engagé, et en particulier les obligations particulières de l'assureur, définir l'ensemble S de toutes les obligations du premier joueur qui sont compatibles avec les contraintes imposées.

2°) une solution particulière de cet ensemble ayant été retenue de commun accord, entre joueurs, quelles sont les méthodes à utiliser et les moyens à réunir pour:

   a) fixer et calculer la succession des obligations du 1er joueur (le demandeur),

   b) fixer et calculer la succession des surplus disponibles, fin d'exercice, au profit du 1er joueur.

En conclusion, l'objectif, que nous nous fixons, est l'établissement de la théorie générale des opérations actuarielles admissibles sur une collectivité arbitraire de risques divers, mais spécifiée d'avance (une telle théorie englobe ipso facto la théorie des opérations viagères). Un tel but peut surprendre, paraître utopique. Paradoxalement nous verrons que les moyens à mettre en oeuvre pour l'atteindre sont très simples.

2. *La méthode théorique de résolution pour les opérations actuarielles inconditionnelles, la relation fondamentale de récurrence*

a. Le principe

Il existe une méthode générale qui permet d'attaquer *uniformément tous les problèmes actuariels du genre spécifié ci-dessus.* Elle est connue en assurance Vie sous le nom de méthode de Fouret.

Mais si, son principe reste d'application en toute généralité, son adaptation doit être différente en assurance non life.

a1) *Le premier joueur*: Nous désignons par:

V_{i-1}, le montant de la sur-couverture (surplus disponible de l'ensemble des assurés de la collectivité des risques) à la fin du $(i-1)^e$ exercice (ou une dette du 2e joueur vis-à-vis du 1er joueur à cette même date);

Π_i le montant du versement effectué par l'ensemble des assurés au début du i^e exercice.

La somme $(V_{i-1} + \Pi_i)$ constitue l'enjeu global engagé par le premier joueur au cours du i^e exercice.

a2) *Le second joueur*:

Nous *supposons* que s'il se présente k accidents au cours de l'exercice, le second joueur doit payer le montant global C_k.

Or, en vertu des hypothèses d'avant-projet, le nombre d'accidents qui peuvent arriver au cours de l'exercice est défini par *une loi de Poisson*, dont le paramètre vaut $l_i\lambda_i$.

Donc le second joueur paiera la somme C_k avec la probabilité

$$p_k^i = e^{-l_i\lambda_i} \frac{(l_i\lambda_i)^k}{k!}$$

et par la suite la valeur probable de ces engagements en cas d'accidents sera donnée par

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k^i C_k = e^{-l_i\lambda_i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(l_i\lambda_i)^k}{k!} C_k$$

D'autre part, la contrainte de sur-couverture, l'oblige à garder en fin d'exercice le surplus V_i (contrairement à ce qui se passe en Vie, c'est une obligation certaine ou inconditionnelle, le contrat ne prenant pas fin suite à l'arrivée d'un ou plusieurs sinistres).

a3) Si nous ne tenons pas compte du facteur intérêt, *le principe d'équité relative exige que les engagements réciproques s'équilibrent* donc

$$V_{i-1} + \Pi_i = e^{-l_i\lambda_i} \sum_{0}^{\infty} \frac{l_i\lambda_i}{k!} C_k + V_i \qquad (\alpha)$$

Telle est la relation fondamentale de recurrence du jeu actuariel engagé entre les joueurs.

Si nous posons $\Delta V_t = V_t - V_{t-1}$, variation du surplus au cours de l'exercice, nous avons l'interprétation suivante: *la prime globale du premier joueur, à payer en début d'exercice, doit toujours couvrir algébriquement et les engagements probables en cas d'accidents et la variation de surplus de l'exercice.*

Cette règle est permanente dans le temps. De plus, elle est indépendante du modèle mathématique représentant la collectivité des risques divers. Enfin l'introduction du facteur intérêt est banale.

3. *L'algorithme de calcul*

b) L'extension de la relation (α) et les conditions aux limites

b1) Nous pouvons écrire la relation pour une suite quelconque d'exercices. Nous nous libérons de la forme particulière du modèle mathématique, en introduisant les notations suivantes:

$$O_t = \left(e^{-l_t\lambda_t} \sum_0^\infty \frac{(\lambda_t l_t)^k}{k!} C_k \text{ dans le modèle d'avant-projet} \right)$$

O_t est la valeur probable des obligations du 2e joueur au cours du exercice.

Alors par sommation de (α) sur l'ensemble des exercices de i à j on aura

$$V_{i-1} + \sum_i^{j-1} \Pi_t = \sum_i^j O_t + V_j \qquad (\beta)$$

Elle constitue la relation *générale liant deux surplus arbitraires.* Elle exprime la condition d'équité relative sur un ensemble consécutif quelconque d'exercices.

b2) Aux limites d'une période d'assurance, *les surplus sont toujours déterminés*:

- au début de la période V_0 est toujours nul, puisqu'aucun versement n'a eu lieu.
- fin de période, si le jeu est équitable, le surplus V_n doit également être nul, sinon l'assureur conserve à son profit des sommes dues à des tiers.

Il en résulte les conditions aux limites

$$V_0 = V_n = 0 \quad (\gamma)$$

c) *Résumé des contraintes mathématiques et obtentions des solutions particulières*

La relation (β) appliquée sur l'horizon n, c'est-à-dire à la durée des contrats

$$\sum_1^n \Pi_t = \sum_1^n O_t \quad (\delta, n)$$

(δ, n) traduit le contrainte d'équité globale sur l'horizon n.

De plus, si nous appliquons la relation globale entre le début du premier exercice et la fin d'un exercice quelconque (on a $V_0 = 0$) donc

$$V_t = \sum_1^t \Pi_t - \sum_1^t O_t$$

La contrainte de positivité: $V_t \geqslant 0$ entraîne donc:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_1^t \Pi_t \geqslant \sum_1^t O_t \\ \text{quelque soit } i \end{array}\right\} \quad (\delta, i)$$

Les relations (δ, $i = 1, 2 \ldots n$-1) définissent l'*ensemble Q d'opérations viagères admissibles non conditionnelles.*

Cet ensemble Q, comporte de nombreux sous-ensembles distincts qui résultent de l'introduction de conditions supplémentaires (bien connues en assurance Vie). Nous en indiquons certaines:

c1) Le sous-ensemble Q_r des opérations actuarielles où *l'assureur se contente de demander annuellement la prime de risque.* Une telle opération entraîne que le surplus annuel V_t est toujours nul, donc:

$$V_0 = V_1 = \ldots = V_t = \ldots V_n = 0$$

Ce qui implique les primes globales de risque

$$\Pi_t^r = O_t$$

La prime globale annuelle pure à demander début exercice correspond à la valeur probable du risque à courir au cours de l'exercice; c'est la solution généralement admise en réassurance.

c2) Le sous-ensemble Q_n des opérations actuarielles où l'assureur admet pour toute la période de n exercices une et une seule prime; dans ces conditions

$$\Pi_2 = \Pi_3 = \ldots = \Pi_{n-1} = 0$$

Ce qui implique:

d'une part $$\Pi_1^n = \sum_1^n O_t$$

d'autre part $$V_t^r = \sum_{t=t}^n O_t$$

Ce type d'assurance correspond aux opérations de liquidation de sinistre.

Le département qui effectue ces opérations se trouve doté en prime unique et à charge d'un exercice déterminé des obligations qui résultent de sinistres découlant de cet exercice.

Toutefois, la collectivité des risques n'est plus constituée par des contrats d'assurance mais par l'ensemble des sinistres à liquider, au cours des exercices futurs.

Les deux joueurs sont respectivement dans un même organisme d'assurance:

a) le département de production et de gestion des risques acceptés;
b) le département de liquidation des sinistres survenus.

Le problème de mise en route est différent, mais les méthodes données ci-dessus restent d'application dès qu'on aura défini la loi stochastique de l'élimination financière des sinistres dans le temps.

c3) Le sous-ensemble Q_a où l'assureur demande une *prime annuelle constante*; dans cette hypothèse

$$\Pi_1 = \Pi_2 = \ldots = \Pi_{n-1}$$

d'où $$\Pi = \frac{\sum_1^n O_t}{n}$$

De telles opérations ne sont pas toujours admissibles, car les contraintes de positivité doivent être vérifiées. Elles impliquent:

quel que soit i $$i\Pi \geqslant \sum_1^n O_t \quad (\varepsilon)$$

ou encore que: $$\frac{\sum_{1}^{i} O_t}{\sum_{1}^{n} O_t} \leqslant \frac{i}{n}$$

ce qui exprime qu'*à tout moment la sommation de la valeur probable des risques ne peut dépasser le pourcentage linéaire* $1/n$ *du risque global admis sur l'horizon total* n.

Il est rarement tenu compte d'une telle condition en pratique, quoique les assureurs non life présentent en général à leur clientèle des contrats à prime constante. Il nous semble intéressant de donner de (ε) une autre interprétation.

Nous pouvons utiliser la formule (β) pour calculer le *surplus* à la fin du dernier exercice, donc le montant mathématique de la dette envers le 2e joueur, qui est à mettre au passif du bilan.

Posons $i = 1$, j arbitraire; alors de (β) on obtient:

$$j\Pi = \Sigma\, O_t + V_j$$

donc $$V_j = {}_j\Pi - \Sigma\, O_t \quad (\varphi)$$

Le surplus à la fin d'un exercice quelconque est la différence entre la valeur des primes payées et le cumul des valeurs probables des risques couverts.

Si nous exprimons que ce surplus doit être non négatif nous retrouvons (ε).

La formule (φ) est l'interprétation rétrospective du surplus. Si on part (β) en posant $j = n$, on obtient l'interprétation rétrospective de ce même surplus (formule bien connue de la réserve en assurance Vie).

d) Il convient de revenir sur les résultats obtenus ci-dessus. On se trouve en fait devant une alternative:

d1) ou bien on admet la contrainte de la surcouverture; dans ces conditions:

1) la prime peut être quérable.
2) il faut mettre au bilan des surplus mathématiques.
3) éventuellement, contrairement aux règles d'usage, exiger une prime constante payable pendant un nombre d'années inférieur à la durée du contrat (comme pour les assurances de solde restant dû en assurance Vie).

d2) ou bien on accepte le principe de sous couverture; dans ces conditions, il faut que:

1) la prime soit portable, donc payable avec contrainte légale
2) en toute logique, au bilan doit intervenir une dette mathématique vis-à-vis de l'assureur, dette à évaluer par les méthodes précises indiquées ci-dessus.

Il est essentiel que l'actuaire soit conscient de ces résultats. Certaines règles de comportement acquises dans le domaine Vie sont en fait d'application dans le domaine non life; on ne s'en est peut-être pas soucié, mais à tort.

4. *La méthode de résolution pour les opérations conditionnelles*

1) Le problème

Le paragraphe précédent suppose que rien ne met fin au contrat pendant toute sa durée n.

Une opération actuarielle *conditionnelle* introduit une clause supplémentaire qui met fin au contrat *si un certain évenement se produit.*

En particulier, le souci de l'assureur ou du réassureur augmente avec le nombre des sinistres qu'il constate dans un ensemble déterminé de contrats qu'il assure. Il peut, bien sûr, limiter le montant total de ses interventions (méthode d'excess of loss et de stop loss, l'introduction d'une franchise). Cela revient à modifier la valeur des sommes C_k assurées. Mais l'opération garde son caractère inconditionnel.

Une autre modalité consiste à prévoir l'annulation automatique du contrat dès qu'il est constaté que le nombre des accidents dépasse une certaine limite.

Une telle clause modifie la valeur du contrat et la technologie du § 2 n'est plus utilisable. Il est utile que nous reprenions la même méthodologie pour trouver automatiquement ce que nous avons à corriger.

2) La relation fondamentale de récurrence

Pour fixer les idées, nous supposerons que le contrat prend fin automatiquement si le nombre d'accidents relatifs à l'exercice dépasse le nombre λ_0 fixé d'avance. Le nombre λ_0 sera appelé le „*niveau critique*" du contrat conditionnel.

Nous utilisons la même méthode qu'au § 2, pour établir la forme spéciale la relation de recurrence fondamentale.

En ce qui concerne le premier joueur, rien n'est changé.

En ce qui concerne le second joueur:

— la valeur probable des engagements O_t en cas d'accidents n'est pas altérée, puisque l'assureur admet le dédommagement total aussi longtemps qu'il n'est pas mis fin au contrat.

— par contre le surplus est à constituer fin d'exercice si et uniquement si le niveau critique λ_0 n'est pas atteint.

Nous désignerons par s_i la probabilité de ne pas atteindre le niveau pendant l'exercice i.

Dans ces conditions, le principe d'équité relative exige que:

$$V_{i-1} + \Pi_i = O_i + s_i V_i \quad (\alpha^*)$$

Telle est la formule particulière acquise par la relation de recurrence (c'est la structure connue en Vie).

3) Développement de l'algorithme de calcul

La formule de base est modifiée et du coup on est obligé d'utiliser la technologie bien connue de l'assurance Vie.

Notons: $$t_i = s_1 s_2 \ldots s_i$$

t_i représente la probabilité pour que le contrat global survive i années après sa conclusion.

En multipliant (α^*) par t_{i-1}, on obtient la relation relative à l'exercice i

et par sommation sur l'ensemble des exercices

$$t_{i-1} V_{i-1} + \Sigma t_k \left[\Pi_k - O_k\right] = t_j V_j \quad (\beta^*)$$

relation qui lie deux surplus mathématiques quelconques, en fonction des obligations des parties au cours de l'intervalle de temps considéré.

En particulier, les conditions aux limites n'étant pas changées, la relation permettant le calcul des primes devient:

$$\Sigma\, t_k \Pi_k = \Sigma\, t_k O_k \quad (\gamma^*)$$

L'analogie avec l'assurance Vie est complète. Elle est d'autant plus que l'on retrouve les formules connues pour le calcul des surplus mathématiques.

Le premier terme représente la prime unique des obligations de l'assureur pour la période restant à courir; le second terme, la valeur probable des versements à effectuer par l'ensemble de contrats au cours de la même période.

Conclusions

Cet article a une très large portée tant théorique que pratique. Il indique comment *il est possible d'envisager une synthèse réelle entre le domaine viager et le domaine non life*. Ceci nous semble une sérieuse avance, mais elle exige, de la part des actuaires, une façon particulière de penser, l'attention étant portée sur la notion de structure.

Même les opérations viagères sociales et collectives appartiennent au domaine des opérations actuarielles généralisées.

Par voie de conséquence, les méthodes classiques du domaine viager se trouvent, après adaptation, *prolongées dans le domaine non viager*. Ceci justifie, mutatis mutandis, dans ce domaine non life l'introduction de nombreuses méthodes acquises pour le calcul des primes et des réserves (classiques ou sur ordinateur).

Mais cette extension ne termine pas la théorie des opérations non life. Car elle laisse de côté le problème des fluctuations par rapport aux valeurs moyennes. Ces dernières seules sont prises en considération dans cette note.

Il convient donc de compléter la théorie exposée ci-dessus par une *théorie constructive du risque*, où effectivement des algorithmes de calcul permettront de chiffrer, sur ordinateur, l'audace que le comportement d'un assureur implique. Cet objectif est peut-être un défi lancé au monde des actuaires. Mais il mérite d'être relevé. La solution est, nous l'espérons, pas aussi éloignée qu'on le pense.

Bibliographie

FRANCKX (1) Essai d'une théorie opérationnelle des risques markoviens, *Università degli Studi di Trieste*. 1963 — N° 11.

—— (2) Introduction à une théorie opérationnelle du risque, *Bulletin de l'Association des Actuaires Suisses*. 1965 — N° 2.

— (3) L'Algorithme du broyage des traces, *Colloque du 75e Anniversaire de l'Institut des Actuaires Français*. Paris 1966.

— (4) Introduction à une théorie opérationnelle du risque, *Bulletin de l'Association des Actuaires Suisses*. 1967 — N° 1.

— (5) Routines d'avant-projet en assurance de risques divers, *Bulletin de l'Association Royale des Actuaires Belges*. 1968.

ASTIN COLLOQUIUM 1966 ARNHEM