Provisionnement des rentes viagères en Algérie entre approche statique et approche prospective

Farid FLICI *

(*) Doctorant en statistique et économie appliquée, Ecole Nationale Supérieure de Statistique et d'Economie Appliquée (EX. INPS) : *farid_flici@yahoo.fr*

RESUME:

Les nouvelles données du marché algérien de l'assurance –vie imposent à tout intervenant de présenter une certaine prudence en matière de provisionnement, notamment lorsqu'il s'agit de contrats de longues durées, et de rentes viagères en particulier. Dans ce sens, le choix de la table de mortalité est de grande importance. Notre population est en plein mutation. Le prolongement continu de la durée de vie humaine diminue l'utilité des tables statiques. Il est donc grand temps de mettre à disposition du secteur des assurances d'une table prospective. C'est dans ce cadre qu'intervient notre travail, qui consiste en une étude comparative entre les deux approches ; statique et prospective, de la modélisation de la mortalité, en matière d'impact sur le provisionnement des rentes viagères.

Mots-clés : provisionnement, rentes viagères, longévité, table de mortalité statiques, table de mortalité prospectives.

Introduction Générale

La rente viagère est un contrat s'étalant sur de longues périodes. La logique du métier stipule que l'assuré doit payer la totalité de ses primes pour que l'assureur puisse s'engager à lui verser les prestations convenues. La distribution de l'engagement de l'assureur dans le temps est fonction de l'évolution du nombre de survivants au sein du groupe assuré.

Afin d'assurer une meilleure allocation des primes collectées au payement des prestations, l'assureur est tenu de repartir le montant de la prime en fonction du risque que comporte chaque année de la période de couverture, et d'évaluer périodiquement, la réserve mathématique lui permettant d'honorer son engagement futur envers les rentiers.
Dans ce sens, l'utilisation des tables de mortalité est indispensable, du fait qu'elles permettent à l'assureur d'estimer la fonction de survie des rentiers, et donc, de la distribution de son engagement futur envers ces derniers. Les tables dites transversales, et à partir de l'observation de la mortalité vécue par une population, durant une année, retracent l'évolution d'une génération fictive en fonction de l'âge sous l'hypothèse que la mortalité future sera similaire à celle du moment, une hypothèse loin d'être réaliste compte tenu de la longévité.

En matière de rentes viagères, la longévité se traduit par le prolongement de la durée de service. Autrement dit, l'augmentation de l'engagement futur de l'assureur. Chose de laquelle l'assureur doit tenir compte dans l'établissement de ses calculs. Il est de nécessité capitale de mettre à disposition de l'assureur d'une table fournissant une description adaptée de l'évolution de la mortalité. Dans ce cadre, les tables de mortalité dites prospectives semblent être de très grande utilité, et c'est dans ce cadre que va intervenir notre travail.

1. Cadre méthodologique et théorique

1.1. OBJECTIFS

L'objectif de ce travail est d'illustrer l'apport de l'utilisation des tables prospectives en matière de provisionnement des rentes viagères, comparativement aux tables statiques, compte tenu des mutations de la population algérienne.

1.2. HYPOTHESES

Tout au long de ce travail, nous allons maintenir l'hypothèse de stabilité financière durant la période du service de la rente.

Quant aux taux de mortalité, nous allons adopter dans un premier temps l'hypothèse de stabilité dans le temps des taux de mortalité, pour passer ensuite sous l'hypothèse d'évolution de la mortalité, avec sous hypothèse, la constance par morceau des taux de mortalité (pour un âge et une année donnés).

1.3. CONCEPTS UTILISES

Rente viagère : La rente viagère consiste en une succession de versements périodiques effectués par un assureur, à partir d'un certain âge jusqu'au décès, contre le payement d'une prime (*cotisation*). Le cycle de vie d'une rente viagère est constitué de deux phases : phase de constitution (payement des primes) et phase de service (versement de la rente).

Provisionnement : estimation de la *réserve mathématique* qui représente une partie des primes payées que doit mettre en réserve un assureur afin de pouvoir satisfaire l'engagement restant envers ses assurés.

1.4. PRESENTATION DU PRODUIT

Le produit traité par notre travail consiste en une assurance de rentes viagères fractionnées de début de période (trimestrielle et payable à partir de 60 ans). Le montant de la rente est fonction de la valeur acquise des versements effectués jusqu'à l'âge de départ en retraite.

1.5. PRESENTATION DU PORTEFEUILLE

Notre portefeuille est celui des rentes individuelles en cours de service de la Société Nationale des Assurances (SAA – division vie) fourni par la situation arrêtée au 31/12/2008. Ce portefeuille est composé de 1700 rentiers et prédominé par les rentiers du sexe masculin avec une proportion de 86, 35 %.

La moitie de ces rentiers (51,12%) sont nés entre 1961 et 1963. 42,29 % sont nés durant la période 1964 – 1967, une minorité (14,18%) est née entre 1968 et 1976.

Lorsqu'on prend les rentiers du point de vue du montant annuel de la rente, nous pouvons dire que prés de la moitie des rentiers (43,82%) perçoivent moins de 1000 DA. 35,71%, perçoivent annuellement entre 1000 et 5000 DA, 19, 41% entre 5000 et 50000 DA. 1,06% seulement touchent plus de 50000 DA.

2. Provisionnement des rentes viagères – *approche statique*

Les modèles de mortalité statistiques reposent sur l'hypothèse que la mortalité future sera similaire à celle du moment. Ceci implique que la structure des quotients de mortalité à différents âges ne subira aucune mutation dans le temps. Plusieurs modèles ont étés

développés dans ce sens. Le choix du modèle d'ajustement repose essentiellement sur la minimisation de l'erreur entre quotients bruts et ajustés. Afin de rester toujours sur l'élan de notre objectif initial, qui consiste en une analyse comparative entre les tables statiques et prospectives en matière d'impact sur le provisionnement des rentes, nous avons préféré de travailler sur la table de mortalité utilisée à l'heure actuelle par les organismes d'assurance - vie en Algérie pour le calcul des produits –vie, à savoir la tables TV 97 – 99. Dans la possibilité d'un ajustement partiel (*(PETAUTON [2003], p 59*), Nous envisageons de réajuster les données brutes de cette table (table féminine 97 – 99 interpolée par la méthode de Karup-King) à partir de 60 ans. Un âge qui correspond à l'âge à partir duquel la rente est servi. La qualité de l'ajustement est fonction de la plage d'âge adoptée. Ajuster la série des quotients de mortalité à partir de 60 ans semble pouvoir donner des résultats de qualité comparativement à un ajustement effectué sur toute la série. Pour ce faire, une comparaison sera faite entre les modèles les plus couramment utilisés et qui semblent mieux décrire l'évolution de la mortalité en Algérie.

2.1. AJUSTEMENT DE LA TABLE FEMININE 97-99

L'évolution des quotients et des taux instantanés de mortalité emprunte, par nature, une allure exponentielle. L'écriture de cette dernière sous une forme linéaire simplifie d'avantage le calcul des paramètres des différents modèles.

2.1.1. Modèle de Gompertz (1925) :

Pour Benjamin Gompertz, le taux de mortalité suit une progression géométrique donnée par la formule suivante :

$$\mu_x = B.C^x$$

Avec B > 0, et C >1.

En passant sous la fonction logarithmique, nous obtenons :

$$\ln(\mu_x) = \ln(B) + x.\ln(c)$$

2.1.2. Modèle de Makeham :

Le modèle de Makeham est une version améliorée du modèle de Gompertz, le plus est la constante 'A' qui représente la mortalité accidentelle, indépendante du vieillissement

$$\mu_x = A + B.C^x$$

Avec B > 0, et C >1.

Forme linéaire : $\ln(\mu_x - A) = \ln(B) + x.\ln(c)$

2.1.3. Modèle Quadratique :

Le modèle quadratique part tout simplement d'une modélisation analytique d'ordre 2 du logarithme du taux instantané de mortalité :

$$\ln(\mu_x) = a + bx + cx^2$$

Un ajustement linéaire du logarithme du taux brut de mortalité, permet d'estimer les paramètres du modèle tout en minimisant la somme des erreurs carrées entre les taux bruts et ajustés.

Les résultats d'estimation des paramètres des différents modèles ainsi que la somme des erreurs carrés sont donnés par le tableau et la figure suivants :

Modèle	a	b	c	∑e^2
Gompertz	-	2,79E-05	1,104478	6,44E-06
Quadratique	-16,223714	0,27143005	-0,001284	1,61E-06
Makeham	-0,000273	3,09E-05	1,103022	7,15E-06

TABLEAU 1 : *résultats d'estimation des paramètres des modèles d'ajustement*

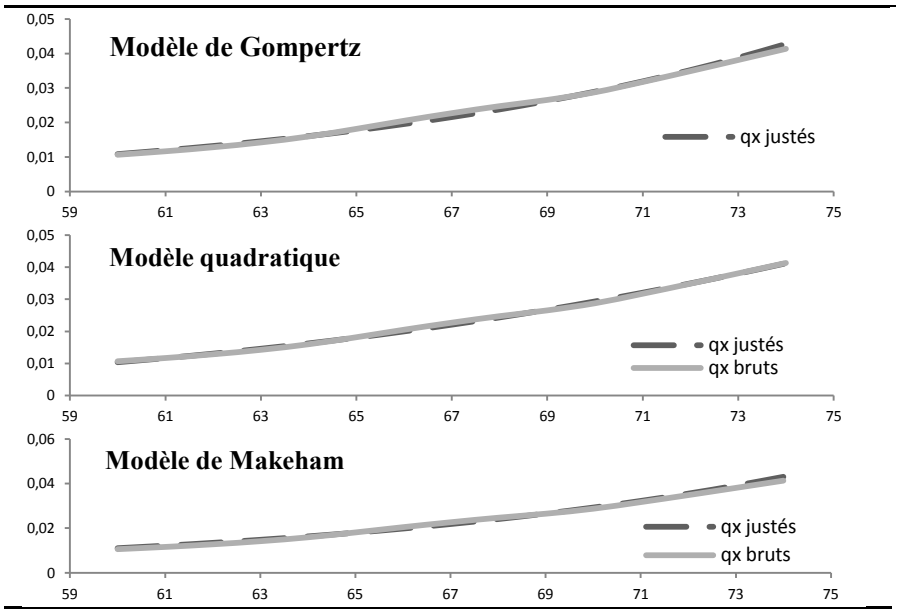

FIG. 1 : *résultats d'ajustement de la série des qx*

Il parait clairement que les modèles quadratique et logistique donnent les résultats les plus satisfaisants.

2.2. EXTRAPOLATION DE LA MORTALITE AUX GRANDS AGES

Nombreuse études de l'évolution de la mortalité aux âges élevés ont montré que cette dernière change de tendance après un âge déterminé, généralement après l'âge de 80 ou de 85 ans (Coale & Guo (1989), Coale & Kikser (1990). A cet effet, l'utilisation des modèles de mortalité classiques peut aboutir à des résultats ne reflétant point la cadence réelle de l'évolution de la mortalité aux âges les plus élevés.

Dans un tel contexte, l'utilisation de modèles appropriés et adaptés aux spécificités des grands âges s'impose. Quashie & Denuit (2005) nous fournit un panorama assez vaste des différentes méthodes conçues pour extrapoler la mortalité aux grands âges.

Le choix de la méthode d'extrapolation des quotients de mortalité dans le contexte algérien, reste contraint par la disponibilité des données. Ce que l'on essaie de faire à l'étape actuelle, est d'extrapoler la mortalité aux grands âges à partir des quotients de mortalité pour une plage d'âge de 60 à 75 ans. Dans ce sens, le modèle de Coale & Guo, du fait qu'il propose une extrapolation à partir de l'âge de 75 ans, semble être le seul modèle compatible avec nos données.

Présentation du modèle de Coale & Guo (1989) :

La méthode proposée par Coale & Guo permet d'extrapoler les taux instantanés de mortalité à partir de 75 ans et jusqu'à 110 ans, et ce suivant la formule suivante :

$$\hat{u}_{75+i} = \hat{u}_{75} \exp\left(ik' - \frac{i(i+1)}{2} R\right) \qquad i = 1,2 \dots \dots 34$$

Tel que : $k' = \ln\left(\frac{\hat{u}_{75}}{\hat{u}_{74}}\right)$ et $R = \frac{30k' - \ln\left(\frac{{}_5\hat{u}_{105}}{{}_5\hat{u}_{75}}\right)}{525}$

Cette méthode a été initialement utilisée sur des taux quinquennaux. Les auteurs ont imposé arbitrairement la contrainte :

$${}_5\hat{u}_{105} - {}_5\hat{u}_{75} = 0.66$$

Le résultat de l'extrapolation effectué sur la sérié des qx ajustés par le modèle quadratique est donné par le graphe suivant :

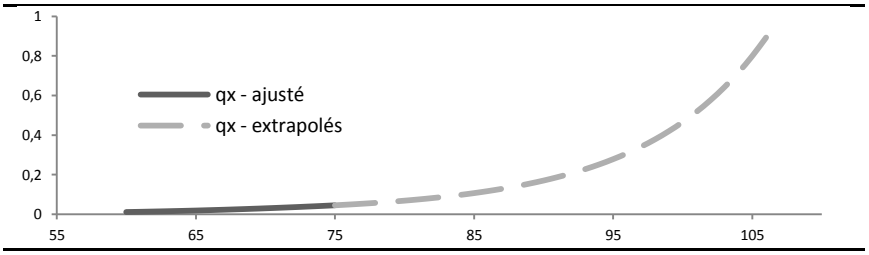

FIG. 2 *: extrapolation des qx par le modèle de Coale & Guo*

L'âge de fermeture donné par cet ajustement est de 107 ans, et il correspond à l'âge ou le taux instantané de mortalité atteint la valeur de 1.

Au stade ou l'on est arrivé, on dispose d'une table qui peut servir au calcul de la provision mathématique pour le portefeuille de rentiers considéré.

2.3. EVALUATION DE LA RESERVE MATHEMATIQUE ET SON EVOLUTION DANS LE TEMPS

A fin de simplifier le calcul de la provision mathématique, et vu que le taux instantané de mortalité est de nature continu, nous avons vu indispensables de marquer un passage au discret, et passer sous quelques hypothèses simplificatrices:

- Nous supposons que les rentes sont annuelles. Et nous constituons des groupes de rentiers par âge. Ce regroupement peut avoir d'impact en matière de provisionnement, mais pas en matière de comparaison entre les deux approches.
- Pour chaque groupe, nous calculons le montant annuel moyen de la rente.

Etant donné $\hat{l}_x = K\, S^x g^{c^x}$, Le calcul de la probabilité de survie entre deux âges (x et $x+n$) est obtenu par : $n\hat{P}_x = \frac{\hat{l}_{x+n}}{\hat{l}_x}$.

Le taux de placement étant supposé stable tout au long de la période de service de la rente *(i =3,6 %),* Le montant de la réserve mathématique correspondant au groupe '*s*', à l'année t, est calculé par la formule :

$$RM_{st} = N_{st} \,.\, R_s . \ddot{a}_x$$

Ou :

- $\ddot{a}_x$ est le prix à l'année *t* d'une rente viagère individuelle, de début de période, d'une unité monétaire, à percevoir par un individu d'âge *x (TOSETTI, WESS & POINCELIN [2003], p 22*).

- $N_{s,t}$ est l'effectif du groupe '*s*' à l'année *'t'*. l'évolution de cet effectif peut se décrire par la relation suivante : $N_{s,t+1} = N_{s,t} \,.\, 1\widehat{P_x}$
- R_s représente le montant annuel moyen de la rente perçu par le groupe '*s'*.

En mettant $V = (1+i)^{-1}$, la formule précédente peut s'écrire :

$$RM_{s,t} = N_{s,t} \,.\, R_s.\, [1 + 1\hat{P}_x.V \; + 2\hat{P}_x V^2 + .. + (w - x - 1)\hat{P}_x V^{w-x-1}]$$

t =2009, 2010, 2011, ... 2056
et x=60, 61, 62,..., 107.

Finalement, La réserve mathématique globale à l'année *t* n'est que la somme des réserves mathématiques des différents groupes de rentiers, et dont l'évolution est donnée par la figure:

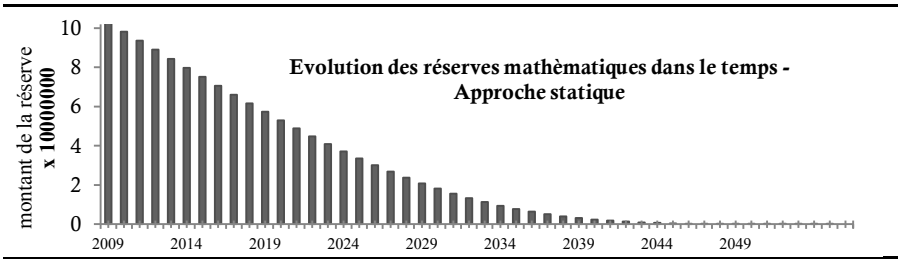

FIG. 3 : *Evolution des réserves mathématiques – Approche statique*

Cette figure représente l'évolution de la réserve mathématique jusqu'au décès du dernier rentier. Pour un âge de fermeture de 107 ans, un rentier de 60 ans les aura en 2056.

La réserve mathématique pour l'année 2009 est évaluée à 102 743 890,75 DZD.

3. Provisionnement des rentes viagères -*Approche prospective*

L'objectif de cette partie est d'arriver à donner une estimation de la réserve mathématique du portefeuille considéré, tenant compte du phénomène de longévité.

Sous l'approche statique des calculs actuariels des produits d'assurance vie, l'utilisation des tables de mortalité féminine permet à l'assureur de tenir compte d'une variation tendancielle de la mortalité. L'approche prospective, du fait qu'elle tient compte du phénomène de longévité, rend inutile cette pratique d'utilisation des tables féminines pour le calcul des produits d'assurance vie. C'est pourquoi, dans la présente partie, la table prospective sera construite pour les deux sexes.

3.1. LA BASE DE DONNEES

Notre base de données est constituée de l'ensemble des tables de mortalité, masculines et féminines, construites par l'Office National des Statistiques (ONS) sur la base des données de l'état civil, de 1977 à 2009. Pour les années pour lesquelles l'ONS n'a pas établi de tables (1979, 1984, 1986, 1988, 1990, 1992 et 1997), ces dernières sont calculées par la moyenne des deux tables voisines.

Cette base de données souffre d'une hétérogénéité en matière de l'âge de fermeture, qui varie ; inexplicablement d'une année à l'autre comme montré dans le tableau suivant :

Années	Age de fermeture
1983, 1985, 1987	70
1993 – 1996	75
1977, 1978, 1980, 1981, 1982, 1989, 1991 et [1998-2009]	80

TABLEAU 2 : *âge de fermeture des différentes tables*

Nous remarquons qu'une part importante des tables est fermée à 80 ans. Si nous nous fixons ; dans une première étape, pour objectif d'étendre la surface de mortalité jusqu'à 80 ans, nous seront amenés à estimer les ${}_5q_{70}$ des années [1982 -1988] et les ${}_5q_{75}$ des années [1982 – 1988] et [1992 – 1997].

3.2. ESTIMATION DES DONNEES MANQUANTES

La base de données dont on dispose jusqu'au stade ou l'on est une matrice exprimée en deux dimensions : l'âge x et l'année d'observation t. à cet effet, les quotients de mortalité manquants peuvent être estimés sous deux approches : horizontale (années) ou verticale (âge). Un ajustement effectué sur la série des ${}_nq_x$ disponibles nous permettra d'aboutir à une estimation des valeurs manquantes dans la série des quotients annuels. L'utilisation des lois de mortalité usuelles permettra également d'ajuster la distribution des probabilités de décès par âge pour une année déterminée, et donc d'extrapoler la tendance observée sur les données disponibles aux âges auxquels les quotients de mortalité sont encore inconnus.

L'estimation des données manquantes en se basant sur une seule dimension peut aboutir à des résultats surprenant du point de vue de la deuxième dimension. A ce stade, nous admettons l'idée que le risque de décès à un âge donné durant une année déterminée est à la fois lié à la structure par âge des quotients de décès à l'année considéré, et aussi à la série temporelle des quotients de mortalité au même âge.

Dans de telles circonstances, nous proposons une méthode qui combine les deux approches. L'extrapolation des données manquantes par un ajustement effectué sur la base des tables annuelles donne des résultats les plus satisfaisantes lorsque les modèles de mortalité sont paramétrés de sorte à concilier la tendance temporelle observée sur l'évolution des quotients de mortalité à l'âge cible.

Donc, dans une première étape, une comparaison entre les modèles usuelles de mortalité afin d'en sélectionner celui qui épouse au mieux les tables annuelles de mortalité. L'étape qui suit consiste à corriger les paramètres du modèle sélectionné de sorte à ce que les résultats obtenus approchent la tendance temporelle de la série des quotients de mortalité disponibles. Cette démarche est basée sur le constat que le quotient de mortalité à un âge donné se trouve corrélé (d'une façon ou d'une autre) avec les quotients des autres âges. A cet effet, on dispose d'un vecteur regroupant les coefficients de corrélation du quotient de mortalité cible avec les autres quotients. L'estimation peut être qualifiée de bonne lorsque l'introduction des valeurs estimées sur la base de données brutes ne modifie pas d'autant le vecteur de corrélation déjà calculé. L'écart entre les deux vecteurs ; initial et recalculé, peut servir d'une mesure de la qualité des valeurs estimées.

Cette idée basée sur la corrélation entre les quotients de mortalité à différents âges est inespérée de celle utilisée pour l'élaboration des tables types de mortalité de Coale Demey (Coale J. & Demeny P., 1966). La différence réside dans l'interprétation des dimensions de la matrice des quotients de mortalité : pour les tables de Coale & Demeny (ou tables types de

façon générale) la matrice des ${}_nq_x$ est constituée des tables de mortalité de différents pays, tandis que pour notre cas il s'agit de tables de mortalité algériennes portant sur plusieurs années.

3.2.1. Approche Verticale – Ajustement des tables annuelles :

Comme montré dans la première partie de ce travail, le modèle quadratique semblent bien ajuster les tables de mortalité algérienne à partir de 60 ans. Ce constat se trouve confirmé avec toutes les tables.

Certes, une série des quotients de mortalité à un âge donné est corrélées avec les autres séries, l'écart moyen entre les coefficients de corrélation avant et après estimation semble fournir un bon indicateur de la qualité de l'estimation des valeurs manquante, puisque l'approche verticale ne donne pas les résultats attendus.

Notre objectif dans ce qui suit est de compléter les données manquantes. En l'occurrence les ${}_5q_{70}$ des années [1982 -1988] et les ${}_5q_{75}$ des années [1982 – 1988] et [1992 – 1997].

3.2.2. Approche Horizontale

Au lieu de extrapoler les taux de mortalité manquants en se basant sur les paramètres calculés dans la partie précédente, l'idée est de réestimer ces paramètres de sorte à minimiser l'écart entre les deux vecteurs de corrélation, le vecteur des taux corrélation entre le quotient de mortalité cible et les autres quotients sans et avec les quotients manquants.

Les vecteurs de corrélation, du 5q70 et 5q75 avec les autres quotients sont donnés par le tableau suivant :

	r(5q70, 5qx)			**r(5q75, 5qx)**	
x	*Hommes*	*Femmes*	*x*	*Hommes*	*Femmes*
0	0,8430	0,7741	**0**	0,8805	0,7556
1	0,6092	0,5326	**1**	0,7645	0,5996
5	0,7277	0,6356	**5**	0,8175	0,6939
10	0,7477	0,6925	**10**	0,8051	0,7354
15	0,8232	0,6895	**15**	0,8378	0,7224
20	0,7838	0,6763	**20**	0,7753	0,6764
25	0,8071	0,6862	**25**	0,7772	0,6872
30	0,7708	0,6992	**30**	0,7408	0,6922
35	0,7221	0,7199	**35**	0,6815	0,6500
40	0,7899	0,8327	**40**	0,7238	0,7008
45	0,8260	0,8624	**45**	0,7563	0,7054
50	0,8500	0,8899	**50**	0,7620	0,7316
55	0,8787	0,9102	**55**	0,8137	0,8033
60	0,8944	0,8871	**60**	0,8610	0,8014
65	0,9581	0,9658	**65**	0,9256	0,8723
70	1	1	**70**	0,9866	0,9273
			75	1	1

TABLEAU 3 : *Vecteurs de corrélation entre 5q70 et 5q75 avec les autres quotients*

Le quotient de mortalité entre 75 et 80 ans est très fortement corrélé avec le quotient qui le précède directement. Plus on s'éloigne, cette corrélation s'affaiblit. Par contre elle se revalorise en arrivant à l'âge zéro. Un constat semblable est observé pour le 5q70.

Si l'on cible par exemple d'estimer les ${}_5q_{70}$ pour les années 1983 -1988, on le fera de telle sorte que le vecteur des taux de corrélation du ${}_5q_{70}$ avec le autres des quotients pour la période

1977 -2009 soit le plus similaire possible du vecteur montré dans le tableau précèdent (colonne1). Autrement dit, la somme des erreurs carrées soit minimale.

Ainsi, les quotients manquants sont complétés comme montré dans la figure suivante :

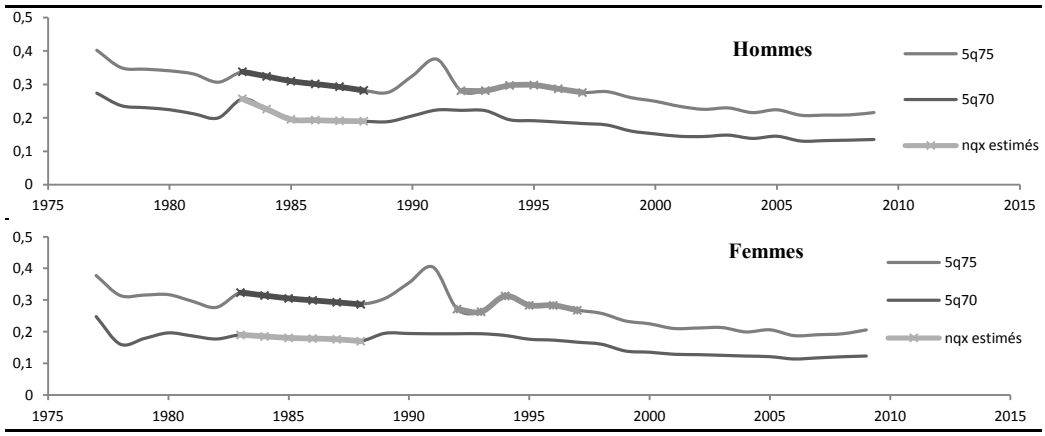

FIG. 4 : *Résultats d'estimation des quotients de mortalité manquantes*

Après avoir complété les données manquantes, nous disposons des quotients quinquennaux, nous allons procéder à l'interpolation des quotients annuels de mortalité. Pour cela, la méthode de Karup-King est utilisée.

Après interpolation, nous avons obtenu les surfaces de mortalité suivantes :

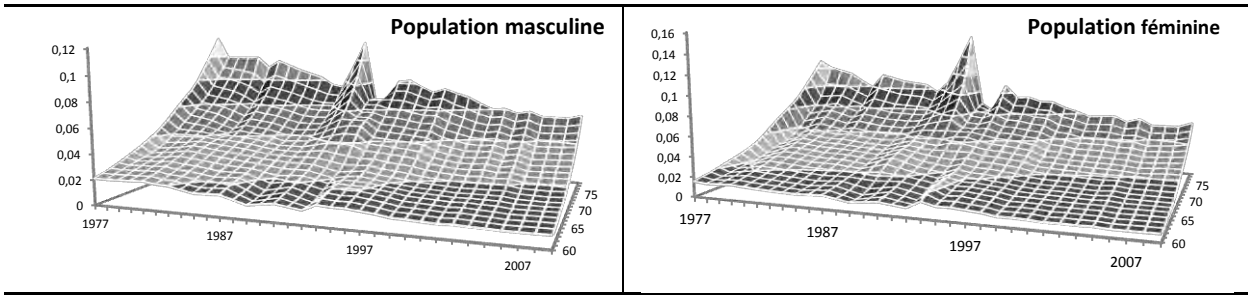

FIG. 5 *: Surfaces brutes de mortalité – 60 – 80 ans d'âges détaillés*

Les pics que l'on observe aux années quatre-vingts dix pour les deux surfaces sont dus aux données brutes données par les tables algériennes de mortalité. L'ajustement de ces surfaces par le modèle de Lee - Carter permettra d'atténuer ces irrégularités.

3.3. AJUSTEMENT DES SURFACES DE MORTALITE AU MODELE DE LEE & CARTER

3.3.1. Rappel sur le modèle de Lée & Carter

Il s'agit d'une méthode d'extrapolation des tendances passées initialement utilisée sur des données américaines, qui est devenue rapidement un standard *(PLANCHET, FAUCILLON et JUILLARD [2006], p 7)*. La modélisation retenue pour le taux instantané de mortalité est la suivante *(LEE & CARTER [1992])*:

$$\boldsymbol{ln}\mu_{xt} = \alpha_x + \beta_x k_t + \varepsilon_{xt},$$

où :

μ_{xt} : Taux instantané de mortalité à la date *t* pour l'âge *x* ;
α_x : Composante spécifique à l'âge *x* et représente la moyenne temporelle des *ln* (μ_{xt});
κ_t : indice de l'évolution générale de la mortalité ;
β_x : Sensibilité de la mortalité instantanée par rapport à l'évolution générale de la mortalité.
$\varepsilon_{x;t}$: terme d'erreur.

Le modèle de Lee & Carter est une méthode qui combine les modèles démographiques de mortalité avec la modélisation des séries temporelles *(BOOTH, HYNDMAN, TIKLE & DE JONG [2006], p 291)*. Il tente à décomposer le logarithme du taux instantané de mortalité en deux composantes : une propre à l'âge (α_x et β_x), et une autre temporelles (κ_t), et sur la base de la quelle, la tendance future de mortalité est extrapolée.

Cette méthode a prouvé son efficacité sur différentes populations : USA, Canada, Chili, Japon, Belgique...etc. Elle a été appliquée lors de sa première apparition sur une population regroupant les deux sexes, mais elle était utilisée en suite même dans le cas de distinction entre sexes *(BOOTH, HYNDMAN, TIKLE & DE JONG [2006], p 297 – 300)*.

3.3.2. Estimation des paramètres du modèle

La surface de mortalité déjà obtenue sera ajustée au modèle suivant :

$$\boldsymbol{ln}\mu_{xt} = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \varepsilon_{xt},$$

L'absence de variables observables dans cette modélisation, rend impossible l'adoption de tout modèle de régression linéaire *(MAGIS, DENUIT & WALHIN [2004]. p 9)*, L'idée de Lee & Carter est donc d'ajuster à la série des logarithmes des taux instantanés de décès une structure paramétrique de telle sorte de minimiser la variance des erreurs, tout en respectant les contraintes suivantes :

$$\sum_t k_t = 0; \qquad et \qquad \sum_x \beta_x = 1$$

Avant de passer à l'estimation des paramètres nous devons d'abord estimer les taux instantanés de mortalité $\mu_x\,(t)$; sous l'hypothèse de leur constance par morceau :

$$\hat{\mu}_{x\,(t)} = \frac{D_x(t)}{L_x(t)}\ ;$$

Où :

$D_x(t)$ est le nombre de personnes d'âge x décès durant l'année t.

$L_x(t)$ l'exposition réelle au risque de décès *(BROUHNS & DENUIT [2001- b], p 50)*:

$$L_x(t) = -\frac{l_x(t).\hat{q}_x(t)}{\ln\,(1-\hat{q}_x(t))};$$

3.3.3. Estimation des $\boldsymbol{\alpha_x}$:

$$\hat{\alpha}_x = \frac{1}{t_M - t_m + 1}\sum_{t=t_m}^{T_M} ln\hat{\mu}_{xt}$$

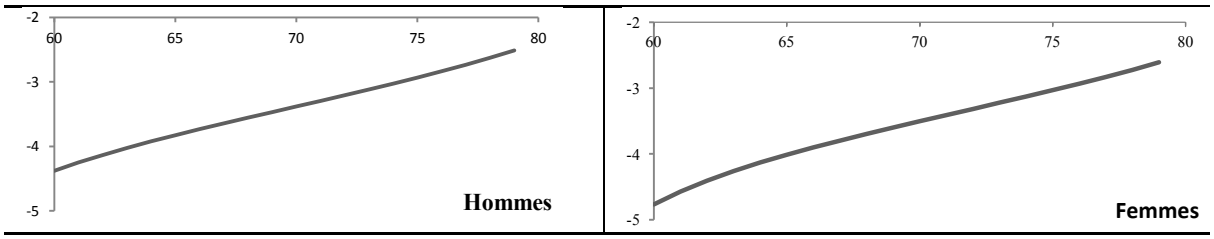

FIG. 6 *: estimation des* $\boldsymbol{\hat{\alpha}_x}$

L'observation de l'évolution du paramètre α en fonction de l'âge pour les deux sexes révèle une tendance ascendante exprimant une relation proportionnelle entre l'âge et les taux de mortalité (vieillissement).

3.3.4. Estimation des $\widehat{\beta}_x$ et des $\widehat{\kappa}_t$

L'estimation des paramètres β_x et κ_t revient à construire la matrice Z de dimension ($X_M - X_m + 1$; $T_M - T_m + 1$) tel que $Z_{x,t} = \ln(\hat{\mu}_x(t)) - \hat{\alpha}_x$. Et à chercher une approximation de cette matrice sous forme $Z \approx \hat{\beta}.\widehat{\kappa'}$.

Dans le présent travail, nous adoptons la démarche classique proposée dans Lee & Carter (1992). Dans ce sens, Soient $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > 0$ les valeurs propres de Z'Z, et soit μ_1 le vecteur propre de Z'Z associée à la plus grande valeur propre λ_1 et v_1 le vecteur propre de ZZ' associé à la même valeur propre.

Ensuite, les paramètres en question sont calculés par les formules suivantes *(MAGIS, DENUIT & WALHIN [2004], p 9):*

$$\hat{\beta} = \frac{v_1}{\sum_j v_{1j}}; \qquad \hat{k} = \sqrt{\lambda_1}.(\sum_j v_{1j}).u_1 ;$$

Les résultats obtenus, avec un taux d'inertie de 99,49% pour les hommes, et de 98, 79% pour les femmes, sont les suivants :

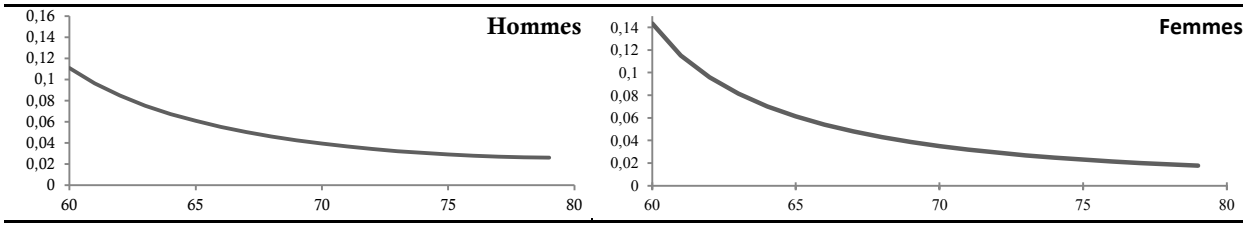

FIG. 7 *: estimation des betas*

La décroissance des β nous laisse dire que les âges les plus élevés semblent être les moins sensibles aux variations tendancielles de la mortalité.

Quant au paramètre κ, son évolution est donnée par les figures suivantes :

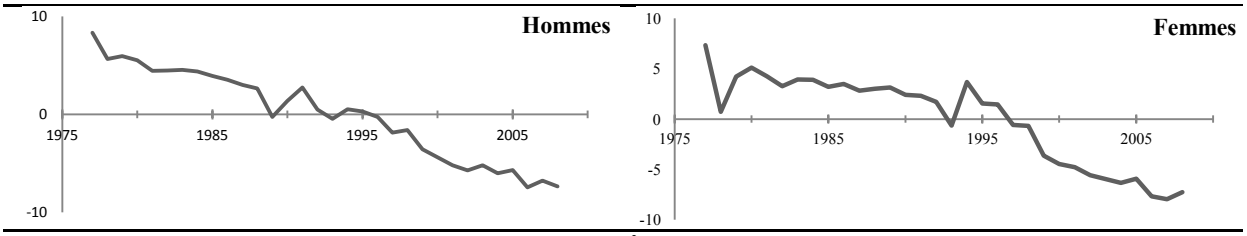

FIG. 8 *: estimation des $\hat{k}_t$ (hommes – femmes)*

L'étape suivante sera de réajuster les k_t de telle sorte que le nombre total de décès entre 60 et 80 ans de chaque génération soit égale au même nombre obtenu par modélisation étant donné α_x et β_x, et nous obtenons $\hat{\hat{k}}_t$. Apres correction de la série obtenue pour respecter la contrainte d'identifiabilitè $\sum_{t=t_m}^{t_M} k_t = 0$, ($\kappa^*{}_t = \hat{\hat{k}}_t - \bar{k}$. avec $\bar{k}$: moyenne des $\hat{\hat{k}}_t$), nous obtenons :

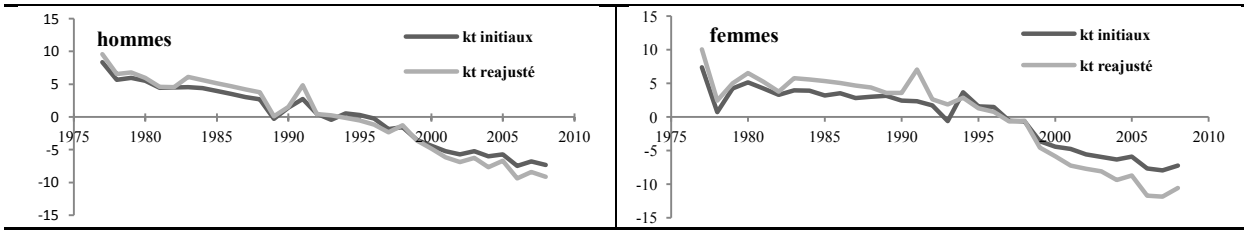

FIG. 9 *: Le paramètre k réajusté (k_t*)– hommes – femmes*

Et enfin, nous corrigeons les ($\hat{\alpha}_x$) afin que l'égalité entre décès observés, et décès prédits par le modèle reste valide, nous aurons donc :

$$\alpha^*{}_x = \bar{\alpha}_x - \hat{\beta}_x . \bar{k}_t$$

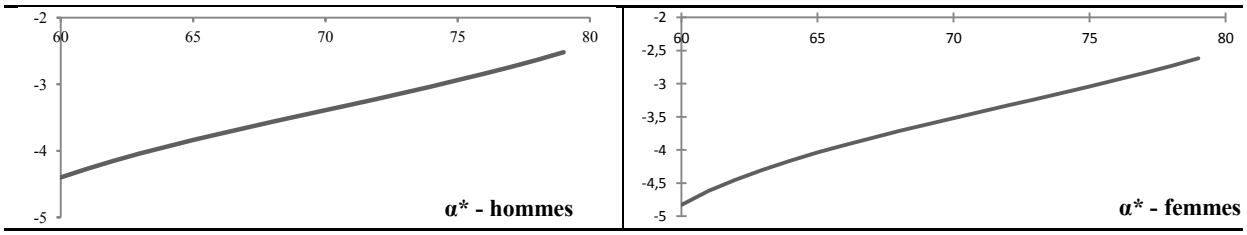

FIG. 10 *: Le paramètre α recalculé (α*)-(hommes- femmes)*

Une fois les différents paramètres du modèle estimés, nous pouvons ajuster la surface de mortalité pour la période (1977 – 2008) et pour une plage d'âge de 60 – 80 ans:

$$\mu^*{}_{xt} = \exp\left(\alpha^*{}_x + \beta^*{}_x k^*{}_t\right)$$

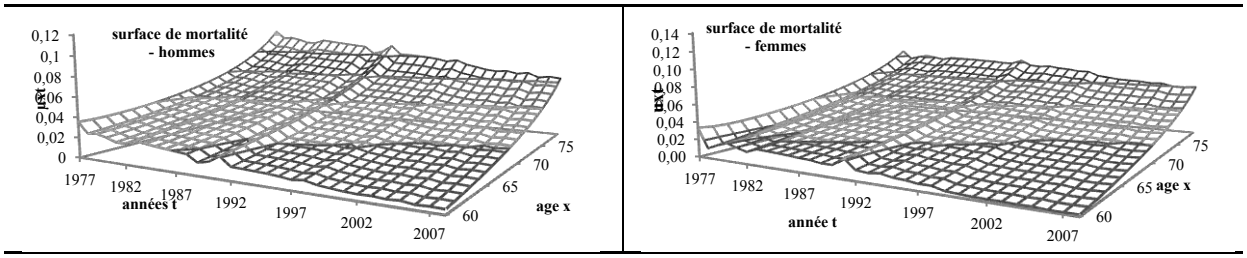

FIG. 11 *: Surface de mortalité ajustée (1977 – 2008) - Hommes - Femmes*

3.4. EXTRAPOLATION DES TAUX DE MORTALITE FUTURS

Cette étape sera consacrée à estimer les taux de mortalité futurs, c'est-à-dire pour *x ϵ [60, 80[* et *t > 2008.* Ce qui revient à extrapoler k_t. Tenant compte de l'âge de fermeture choisi (110 ans), l'extrapolation doit donc se faire pour les cinquante prochaines années ; c'est-à-dire à l'horizon 2058. L'extrapolation des k_t peut se faire par une modélisation ARIMA, ou par toute modélisation de séries temporelles (*PLANCHET, FAUCILLON et JUILLARD [2006], p 8)*, ou encore par régression linéaire (*PLANCHET [2009- b], p 28)*. Pour le présent travail, nous avons préféré de le faire par un modèle ARIMA.

L'utilisation de la méthode Box & Jenkins a donné les résultats suivants *:*

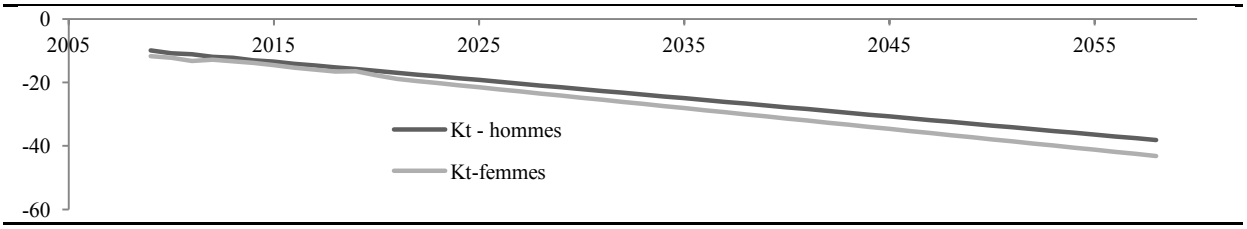

FIG. 12 *: extrapolation des k_t à l'horizon 2058,*

Après avoir extrapolé la tendance temporelle de mortalité k_t, nous pouvons à l'instant reconstruire la surface de mortalité pour t allant de 2009 à 2058 :

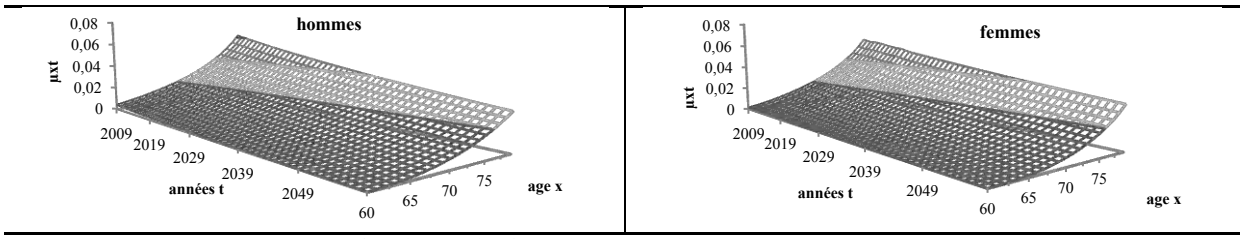

FIG. 13 : *Surface de mortalité future (2009 – 2058) jusqu'à 80 ans - Hommes - Femmes*

Une fois les taux de mortalité futurs ; jusqu'à 80 ans sont calculés, il reste à calculer les taux de mortalité pour les grands âges ; c'est-à-dire pour plus de 80 ans. Pour ce faire, plusieurs méthodes peuvent être utilisées (*QUASHIE & DENUIT [2005])*.

3.4.1. Extrapolation des taux de mortalité par la méthode de Coale & Guo (1989)

Comme nous l'avons expliqué dans la première partie (voir page 4) de ce travail, l'indisponibilité des données au delà de 80 ans nous impose l'utilisation du modèle d'extrapolation de Coale & Guo si l'on veut disposer d'une marge d'évaluation de la qualité des donnés extrapolées. Nous tenons juste à rappeler la formule proposée par les auteurs :

$$\hat{u}_{75+i} = \hat{u}_{75} \exp\left(ik' - \frac{i(i+1)}{2}R\right) \qquad i = 1,2 \dots \dots 34$$

Tel que : $k' = \ln\left(\frac{\hat{u}_{75}}{\hat{u}_{74}}\right)$ et $R = \frac{30k' - \ln\left(\frac{{}_5\hat{u}_{105}}{{}_5\hat{u}_{75}}\right)}{525}$

Les paramètres du modèle de Coale & Guo (*R, k ainsi que* ${}_5\hat{u}_{105}$) seront estimés de sorte à minimiser l'écart entre quotients bruts et extrapolés. On aura donc à minimiser :

$$\bar{e}_x = \frac{1}{n} \sum_{x=76,t=1977}^{84,2009} {e_{xt}}^2$$

sous les contraintes suivantes :

i) Les quotients de mortalité sont croissants : $q_{x+1} > q_x$; $\forall\ x \geq 75$.
ii) Les quotients de mortalité masculins sont supérieurs aux taux de mortalité féminins : $q_x^m \geq q_x^f,\ \forall\ x \geq 75$.

Quant à cette dernière contrainte, nous tenons à signaler qu'elle ne peut guerre être valables pour toutes les tables du fait que certaines table ne vérifient pas cette contrainte pour les âges inférieurs à 80 ans. On assiste d'ailleurs à une surmortalité féminine observée pour certaines années pour certaines catégories d'âge.

L'utilisation de la méthode de Coale & Guo nous a permis d'avoir les résultats suivants :

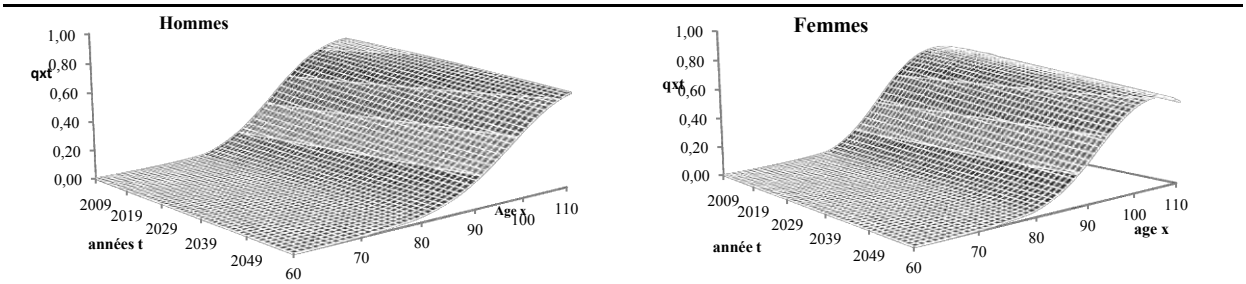

FIG. 14: *Surfaces de mortalité prospective construite à l'aide du modèle de Lee & Carter*

3.5. MESURE DE LA QUALITE DE L'AJUSTEMENT

Dans l'intention de mesurer la qualité de l'ajustement des surfaces obtenues nous avons fait recours au coefficient de détermination *(R^2)*. Pour ce genre d'ajustement on procède à une segmentation par âges *(BROUHNS, DELWARDE & DENUIT [2002], p 51, ou BROUHNS & DENUIT [2001- b], p 51)*. La comparaison a été faite entre les quotients bruts de mortalité et ceux ajustés par le modèle de Lee & Carter, pour la période (1977 – 2008) et pour la plage d'âge (60 – 80).

Les résultats obtenus permettent de qualifier l'ajustement effectué de qualité, notamment pour la table hommes ou nous observons un seuil de détermination de 0, 73. L'ajustement de la table femmes l'est mais de façon moindre avec un seuil de 0,5, mais à partir de l'âge de 62 ans pour les hommes et 64 ans pour les femmes *(R_x^2)* n'a pas descendu sous la valeur de 0,8.

3.6. CALCUL DES PROVISIONS MATHEMATIQUES

A fin de simplifier les calculs, nous avons vu indispensable de passer sous certaines hypothèses simplificatrices :

- Nous supposons que la rente est annuelle, unique, et versée au premier jour de l'année, ce qui implique une rente annuelle de début de période.
- Nous constituons de groupe de rentiers par âge, en séparant entre les deux sexes.
- Chaque groupe '*s*'est caractérisé par son montant annuel moyen de la rente, noté 'R_s'. et son effectif au début de l'année *t,* noté l_{st}.

Sous l'hypothèse de constance par morceau des taux instantanés de mortalité, nous avons (*MAGIS, DENUIT & WALHIN [2004], p 9)*:

$$\hat{P}_{xt} = \exp(-\hat{\mu}_{xt})$$

Que nous utilisons ensuite, pour calculer la probabilité de survie entre deux âges *x* et *x+n :*

$${}_n\hat{P}_{xt} = \hat{P}_{xt} \cdot \hat{P}_{x+1,t+1} \cdot \hat{P}_{x+2,t+2} \cdot \hat{P}_{x+3,t+3} \cdots\cdot\cdot \hat{P}_{x+n-1,t+n-1}$$

Le taux de placement étant supposé stable tout au long de la période du service de la rente (i=3,6%), Le montant de la réserve mathématique correspondant au groupe '*s'*, à l'année t, est calculé par la formule suivante :

$$RM_{st} = N_{st} \,.\, R_s . \ddot{a}_x(t)$$

Ou

- $\ddot{a}_x(t)$ est le prix à l'année *t* d'une rente viagère, de début de période, d'une unité monétaire, à percevoir par un individu d'âge *x (BROUHNS, DELWARDE & DENUIT [2002], p 46).*
- $N_{s,t}$ est l'effectif du groupe '*s*' à l'année *'t'*. l'évolution de cet effectif est donnée par la relation suivante : $N_{s,t+1} = N_{s,t} \,.\, 1\hat{P}_{x,t}$
- R_s représente le montant annuel moyen de la rente perçu par le groupe '*s'*.

Cette formule peut également s'écrire (avec $V = (1+i)^{-1}$);

$$RM_{st} = N_{st} \,.\, R_s[1 + {}_1\hat{P}_{xt}.V + {}_2\hat{P}_{xt}V^2 + .. + {}_{(w-x-1)}\hat{P}_{xt}V^{w-x-1}]$$

La réserve correspondant à une année *t* n'est que la somme des réserves constituées sur différents groupes.

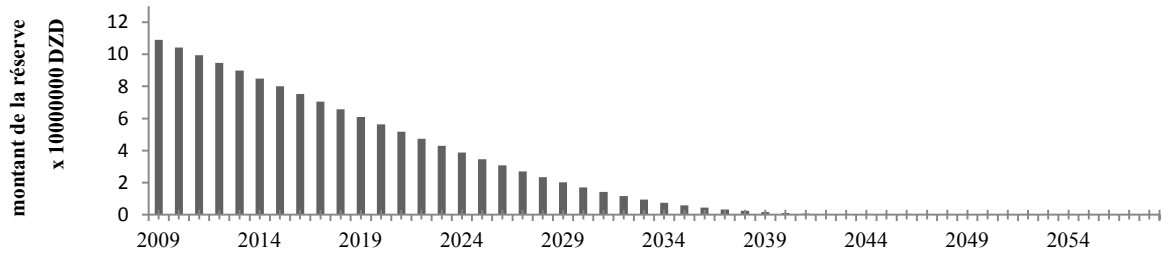

FIG.15 : *évolution de la réserve mathématique - Approche prospective*

La réserve que doit se constituer l'assureur afin de faire face à son engagement envers les rentiers les deux sexes unis est évaluée au début de l'année 2009 à prés de 110 millions dzd.

De la lecture des résultats, nous constatons facilement l'importance que présente la réserve mathématique calculée sous l'hypothèse de mortalité prospective par rapport à celle calculée sous l'hypothèse de mortalité statique. Cette différence est de plus de 10 %, et implique que le système de provisionnement de la SAA comporte un important déficit, évalué ; selon notre étude à prés de 10 millions de dinars. Ce qui peut être principalement expliqué par la légère tendance à la baisse des quotients de mortalité induite par le phénomène de longévité, et aussi par le prolongement de l'âge de fermeture de la table de mortalité de 105 ans à 110 ans.

4. Conclusion Générale

La comparaison des résultats d'estimation des réserves mathématiques laisse apparaitre clairement l'apport de la modélisation prospective des taux de mortalité par rapport à la modélisation statique. Dans notre exemple traité, la différence en matière de réserves mathématiques est de 10 %. Ce qui veut dire que dans le cas ou la mortalité évolue selon notre modélisation, l'organisme d'accueil aura besoin de 10 % de plus de ses réserves pour pouvoir satisfaire son engagement futur envers ses rentiers.

Les résultats obtenus, nous laissent tirer l'importance qui doit être accordée au phénomène de longévité lors de l'établissement des différents calculs relatifs aux contrats portant sur la vie humaine.

Le choix de l'approche prospective comme modèle de provisionnement est une solution nécessaire mais n'ont pas suffisante pour avoir une meilleure estimation possible de la réserve qui sera réellement nécessaire pour assurer le service d'une assurance de rentes viagère. Le choix du modèle et de l'âge de fermeture et la méthode d'estimation des données manquantes ont également un rôle très important.

Bibliographie

[1] BOOTH H., HYNDMAN R. J., TIKLE L. & DE JONG P. [2006]. *Lee-Carter mortality forcasting : a multi- country comparaison of variants and extensions.* DEMOGRAPHIC RESEARCH. Volume 15. Article 9. Pages 289 – 310. Max Planck Institute for Demographic Research. Germany. Oct 2006.

[2] BROUHNS N. & DENUIT M. [2001- b]. *Risque de longévité et rentes viagères – II. Table de mortalité prospective pour la population belge.* Belgian Actuarial Bulletin, Vol.2, n° 1, 2002.

[3] BROUHNS N., DELWARDE A. & DENUIT M. [2002]. *Elaboration de tables de mortalité prospectives ou comment tarifer des rentes viagères lorsque la mortalité évolue.* Institut de statistique, Université catholique de Louvain. Sept 2002.

[4] Coale A. J. and Demeny P., Regional Model Life Tables and Stable Populations (Princeton, N.J., Princeton University Press, 1966)

[5] DEVOLDER & GILLES [2006]. *Support de cours d'ASSURANCE VIE***.** *Institut des sciences actuarielles. Université catholique de Louvaine (UCL).* 2OO6 – 2OO7.

[6] HESS C. [2000]. *Méthodes Actuarielles de l'assurance vie.* Collection Gestion. Série Politique générale, Finance et Marketing. Edition ECONOMICA. Paris. 2000.

[7] JUSTENS D. & HULIN L. [2000]. *Théories actuarielles.* Editions du CEFAL. 2000.

[8] LANGENAKEN P. [2005]. *Visualisation de cas d'optimisation.* Journées des l'APMEP à CAEN le 22-25 Octobre 2005.

[9] LEE R. D. & CARTER L. R. [1992]. *Modeling and forcasting U. S. Mortality.* Journal of American statistical association. Vol. 87. N°419 (Sep. 1992). Pages 659 – 671.

[10] MAGIS C., DENUIT M. & WALHIN J.F.[2004]. *Une proposition de tables prospectives pour le marché belge de rentes.* Belgian Actuaial Bulletin, Vol 4, n° 1, 2004.

[11] PETAUTON P. [2003]. *Théorie et pratique de l'assurance vie*. 3° édition. Edition DUNOD. Paris. 2003.

[12] PLANCHET F., FAUCILLON L. et JUILLARD M. [2006]. *Quantification du risque systématique de mortalité pour un régime de rentes en cours de service.* Aout 2006.

[13] QUASHIE A. & DENUIT M. [2005]. *Modèles d'extrapolation de la mortalité aux grands âges.* Institut des Sciences Actuarielles & Institut de statistique. Université Catholique de Louvain, Belgique. 13 février 2005.

[14] TOSETTI A., WESS F., POINCELIN T. [2003]. *Les outils des l'actuariat vie.* Editions ECONOMICA. 2003.