ALLOCATION D'ACTIFS D'UN REGIME DE RENTES EN COURS DE SERVICE

Frédéric PLANCHET[*] **Pierre THEROND**[α]

ISFA – Université Lyon 1 [β]
JWA – Actuaires [γ]

RESUME

Nous comparons deux méthodes d'allocation initiale d'actifs d'un régime de rentes en cours de service dans le cas simplifié du choix de portefeuille entre un bon de capitalisation et un actif risqué modélisé par un mouvement brownien géométrique. Les deux méthodes d'allocation d'actifs proposées se fondent sur les critères de probabilité de ruine et de maximisation des fonds propres économiques. Nous abordons successivement les cas où les flux de passif sont connus puis aléatoires, ce qui nous permet d'étudier la décomposition du risque entre risque démographique (mutualisable) et risque financier (non mutualisable) puis l'impact de la prise en compte de la nature aléatoire des flux de prestations sur le choix de portefeuille. Enfin nous introduisons un processus de revalorisation des rentes lié à l'évolution de l'inflation et observons son impact sur les allocations obtenues par les deux critères retenus.

MOTS-CLEFS : Allocation d'actifs, probabilité de ruine, fonds propres économiques, assurance vie, mutualisation, revalorisation de rentes.

ASSET ALLOCATION OF A PENSION SCHEME DURING THE DECUMULATION PHASE

ABSTRACT

The aim of this paper is to compare two asset allocation methods for a pension scheme during the decumulation phase in the simplified portfolio selection between a risky asset following a geometric Brownian motion and a riskless asset. The two asset allocation criteria are the ruin probability of the insurance company and the optimization of the economic equities. We first solve the asset allocation problem with deterministic pension payments then with stochastic mortality risk. We analyze the part of mortality risk in the global risk of the company. Then we show the impact of the indexation of the pensions on the inflation for the asset allocation.

KEYWORDS : Asset allocation, ruin probability, economics equities, life insurance, mutualization, pension adjustment.

Journal of Economic Literature Classification: G11, G23.

Version de juillet 2004 (1ère version d'avril 2004).

[*] Frédéric Planchet est professeur associé de Finance et d'Assurance à l'ISFA (Université Lyon 1 – France) et actuaire associé du Cabinet JWA-Actuaires. Contact : fplanchet@jwa.fr.

[α] Pierre Thérond est étudiant en doctorat à l'ISFA et actuaire au sein du Cabinet JWA-Actuaires. Contact : ptherond@jwa.fr.

[β] Institut de Science Financière et d'Assurances (ISFA) - 43, boulevard du 11 novembre 1918 69622 Villeurbanne Cedex – France.

[γ] Cabinet JWA–Actuaires - 9, rue Beaujon 75008 Paris et 18, avenue Félix Faure 69007 Lyon.

SOMMAIRE

1. INTRODUCTION 2

1.1. CARACTERISTIQUES DU PORTEFEUILLE DE RENTES 3
1.2. NOTATIONS 4
1.3. PROBLEMATIQUE 4

2. FLUX DE PRESTATIONS DETERMINISTES 7

2.1. PROBABILITE DE RUINE 7
2.2. FONDS PROPRES ECONOMIQUES 9

3. FLUX DE PRESTATIONS ALEATOIRES 12

3.1. ANALYSE DU RISQUE 13
3.2. CRITERES D'ALLOCATION 16

4. REVALORISATION DES RENTES 17

4.1. MODELISATION DE L'INFLATION 18
4.2. ALLOCATION D'ACTIFS 21
4.3. UTILISATION DES OATI 22

5. CONCLUSION 23

1. INTRODUCTION

La détermination de l'allocation d'actif est un thème central dans les problématiques d'assurance vie, particulièrement développé dans le contexte des contrats d'épargne et des régimes de retraite supplémentaires. Dans le cas de la retraite, ou de prestations de rentes viagères, la durée des contrats permet aux services de gestion actif/passif d'élaborer des stratégies d'allocation d'actifs à long terme a priori indépendantes de spéculations à court terme (qui relèvent de l'allocation tactique).

Les premiers modèles d'allocation d'actifs à intégrer le risque lié aux placements ont été inspirés de techniques financières, en particulier de critères de type Markowitz [1952]. Mais ces modèles n'intègrent pas les contraintes propres à un régime de rente.

Au surplus, Boyle [2004] montre les limites de l'utilisation de telles approches lorsque l'on intègre l'estimation des paramètres des actifs, qui peut conduire à une allocation sous-optimale.

Depuis 2001, des auteurs comme Battochio, Menoncin, Scaillet [2004], Milevsky ou Boulier ont développé des modèles intégrant les contraintes assurantielles (notamment le risque de mortalité), mais leur mise en œuvre pratique est délicate (du fait notamment de la problématique du choix d'une fonction d'utilité).

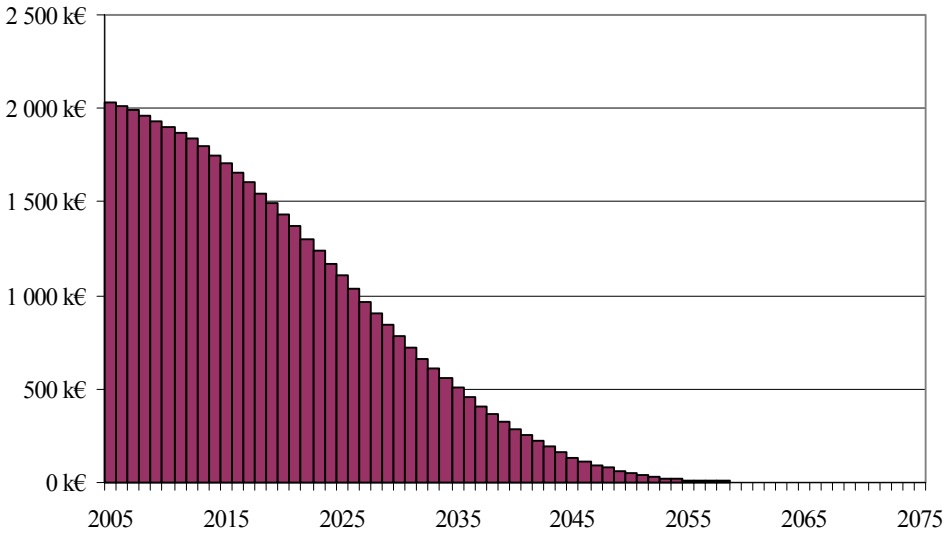
Par ailleurs, dans le cadre des réflexions sur la solvabilité des organismes assureurs issues de « solvabilité 2 »[1], de nouveaux modèles intégrant les paramètres de solvabilité par le biais d'une contrainte sur la probabilité de ruine sont apparus. On détermine ainsi une allocation d'actifs qui contrôle la probabilité de ruine de l'assureur ou en d'autres termes la capacité de faire face à ses engagements, au travers de critères de type Value-at-Risk (VaR) ou Tail-VaR.

Dans ce contexte, l'objectif de ce travail est de proposer une démarche de détermination de l'allocation stratégique spécifique des régimes de rentes intégrant les particularités de l'assurance, sans nécessité de fixer à priori la probabilité de ruine, qui est simplement contrôlée *ex post*. L'objectif poursuivi est de proposer un critère d'allocation pertinent et opérationnel. Afin de focaliser l'exposé sur le choix du critère proposé et ses propriétés, un certain nombre d'hypothèses simplificatrices sont effectuées ; elles seront relâchées dans de futurs développements.

Cet article reprend l'exemple utilisé par Gautron, Planchet et Thérond [2004] et repris par Planchet et Thérond [2004b].

1.1. CARACTERISTIQUES DU PORTEFEUILLE DE RENTES

Dans la suite, nous utiliserons pour les applications numériques un portefeuille constitué de 374 rentiers âgés en moyenne de 63,8 ans au 31/12/2003. La rente annuelle moyenne s'élève à 5 491 €. Le graphique *infra* présente les flux de prestations espérés en fonction du temps obtenus à partir de la table de mortalité TV 2000.



Graphique 1 : Flux de prestations espérés

[1] Voir notamment Association Actuarielle Internationale [2004] et les travaux de la Commission européenne (MARKT/2543/03 [2004]).

Avec un taux d'escompte des provisions de 2,5 %, la provision mathématique initiale, s'élève à 32,8 M€. La duration[2] du passif est alors de 12,3 ans.

1.2. NOTATIONS

Nous noterons dans la suite de l'article :

- ✓ E_t le montant des fonds propres à la date t,
- ✓ L_t le montant des provisions mathématiques à la date t,
- ✓ A_t la valeur des placements à la date t,
- ✓ $\widetilde{F}_t$ le flux de prestation (aléatoire) qui aura lieu à la date t,
- ✓ i le taux (discret) d'escompte des provisions mathématiques,
- ✓ r le taux sans risque instantané, supposé constant,
- ✓ **P** la probabilité historique et Φ sa filtration naturelle,
- ✓ **J** l'ensemble des individus,
- ✓ $x(j)$ l'âge en 0 de l'individu j et r_j le montant de sa rente annuelle.

1.3. PROBLEMATIQUE

Le portefeuille est exclusivement constitué de rentes en cours de service supposée non réversibles. L'assureur ne reçoit donc plus de primes et doit gérer au mieux ses actifs afin de pouvoir honorer son engagement vis-à-vis des bénéficiaires.

En 0, il estime la suite de flux probables de sinistres que nous noterons $\left(F_t\right)_{t\geq 1}$:

$$F_t = \mathbf{E}\left[\widetilde{F}_t \,\middle|\, \Phi_0\right] \tag{1}$$

Où :

$$\widetilde{F}_t = \sum_{j\in\mathbf{J}} r_j * \mathbf{1}_{]t;\infty[}\left(T_{x(j)}\right) \tag{2}$$

Où $T_{x(j)}$ désigne la date de décès (aléatoire) de la tête d'âge $x(j)$.

Avec les notations classiques de l'assurance vie :

$$F_t = \sum_{j\in\mathbf{J}} r_j * \frac{l_{x(j)+t}}{l_{x(j)}} \tag{3}$$

---

[2] On rappelle la définition de la duration de Macaulay, qui peut-être interprétée comme la durée de vie moyenne d'un échéancier de flux : $\mathbf{D}(f;i) = \frac{1}{V}\sum_{k\geq 1} k * f_k * (1+i)^{-k}$ où $V = \sum_{k>1} f_k * (1+i)^{-k}$. Le lecteur se réfèrera à Quittard-Pinon [2002] pour les propriétés de la duration.

A partir de cette estimation, il détermine une provision mathématique L_0 :

$$L_0 = \sum_{t=1}^{\infty} F_t \left(1+i\right)^{-t} \tag{4}$$

Le bilan de l'assureur en 0 peut alors s'écrire :

Bilan en 0

A_0	E_0
	L_0

Supposons que les prestations sont servies en début d'année, le bilan de l'assureur évolue alors selon le processus suivant :

$$\begin{cases} L_t = \sum_{k=t+1}^{\infty} \dfrac{\mathbf{E}\left[\widetilde{F}_k \,\middle|\, \Phi_t\right]}{\left(1+i\right)^{k-t}} \\ A_t = \left(1+\widetilde{R}_t\right) A_{t-1} - \widetilde{F}_t \\ E_t = A_t - L_t \end{cases} \tag{5}$$

où $\widetilde{R}_t$ désigne le rendement (aléatoire) du portefeuille financier entre les dates $t-1$ et t.

Supposons que l'assureur puisse constituer son portefeuille financier avec deux actifs :

- ✓ Un bon de capitalisation non-risqué de prix Y_t à la date t :

$$Y_t = Y_0 \, e^{rt} \tag{6}$$

- ✓ Un actif risqué dont le cours X suit un mouvement brownien géométrique :

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu \, dt + \sigma \, dB_t \tag{7}$$

Où B est un mouvement brownien standard sous la probabilité historique **P**.

Pour simplifier les écritures, on posera, sans perte de généralité : $X_0 = Y_0 = 1$. Nous supposerons également que :

$$\mu \geq r \geq i \geq 0 \tag{8}$$

Cette hypothèse est assez naturelle puisque le rendement espéré d'un actif risqué doit être plus élevé que celui d'un placement sans risque et que le taux maximal d'escompte des provisions (fixé réglementairement) est, par prudence, moins élevé que le rendement escompté des actifs.

Lorsque l'assureur est amené à désinvestir pour payer les prestations, nous supposerons qu'il vend les deux actifs de manière proportionnelle à leur part respective dans la valeur de marché du portefeuille. De manière pratique, cela revient à considérer que l'actif est investi en 0 dans un fonds qui ne fera plus l'objet d'arbitrage et dont l'assureur vendra des parts pour régler les rentes.

Formellement, on a :

$$\begin{aligned} A_1 &= \left(\theta X_1 + (1-\theta)Y_1\right)A_0 - F_1 = \left(\theta X_1 + (1-\theta)Y_1\right)\left[A_0 - \frac{F_1}{\theta X_1 + (1-\theta)Y_1}\right] \\ A_2 &= \left(\theta X_2 + (1-\theta)Y_2\right)\left[A_0 - \frac{F_1}{\theta X_1 + (1-\theta)Y_1}\right] - F_2 \\ A_2 &= \left(\theta X_2 + (1-\theta)Y_2\right)\left[A_0 - \sum_{s=1}^{2}\frac{F_s}{\theta X_s + (1-\theta)Y_s}\right] \end{aligned} \qquad (9)$$

Où θ désigne la proportion initialement investie en actif risqué.

Par récurrence, il vient :

$$A_t = \left(\theta X_t + (1-\theta)Y_t\right)\left[A_0 - \sum_{s=1}^{t}\frac{F_s}{\theta X_s + (1-\theta)Y_s}\right] \qquad (10)$$

Notons que cette expression n'est pas équivalente à :

$$A_{t+1} = \left(\theta\frac{X_{t+1}}{X_t} + (1-\theta)e^r\right)A_t - F_{t+1} \qquad (11)$$

Cette approche alternative (11) correspond à la situation dans laquelle l'assureur recompose, chaque début de période, son actif en investissant θ en actif risqué *X* et 1-θ en bon de capitalisation *Y*.

Le problème auquel se trouve confronté l'assureur est de composer en 0 son portefeuille d'actifs de manière optimale. Nous verrons dans la suite ce qu'il faut entendre par « de manière optimale ».

Dans la suite du développement, nous supposerons que :

- ✓ Les rentes ne sont pas revalorisées (cette restriction sera levée dans le paragraphe 4).
- ✓ Les suites de flux de prestations et de rendements des actifs sont indépendantes.

2. FLUX DE PRESTATIONS DETERMINISTES

Supposons que les flux de prestations sont connus en 0. Cette situation correspond au cas d'un portefeuille important, condition qui n'est pas réalisée dans notre exemple (le cas général est traité au paragraphe 3).

En effet, cela signifie que les effectifs à chaque âge sont suffisamment importants pour que l'approximation suivante soit validée :

$$\widetilde{F}_t \approx \mathbf{E}\left[\widetilde{F}_t\right] = F_t \tag{12}$$

D'après (5), le bilan évolue alors de la manière suivante :

$$\begin{cases} L_{t+1} = (1+i)L_t - F_{t+1} \\ A_{t+1} = \left(1+\widetilde{R}_{t+1}\right)A_t - F_{t+1} \\ E_{t+1} = A_{t+1} - L_{t+1} \end{cases} \tag{13}$$

Notons que E est une alors sous-martingale. En effet d'après (13), il vient :

$$E_{t+1} = \left(1+\widetilde{R}_{t+1}\right)E_t + \left(\widetilde{R}_{t+1} - i\right)L_t \tag{14}$$

Or[3] :

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbf{E}\left[R_{t+1} \,\middle|\, \Phi_t\right] \geq i \geq i^* \frac{L_t}{L_t + E_t} \tag{15}$$

Donc :

$$\mathbf{E}\left[E_{t+1} \,\middle|\, \Phi_t\right] \geq (1+i)E_t \geq E_t \tag{16}$$

Intuitivement, cela signifie que l'actionnaire verra en moyenne les fonds propres augmenter au cours du temps. En effet, du fait du choix prudent du taux d'actualisation, les fonds propres de l'assureur augmenteront en moyenne du fait des produits financiers qu'ils génèrent et, en l'absence de revalorisation des rentes, du fait de la sur-performance espérée des actifs en représentation des engagements techniques.

2.1. PROBABILITE DE RUINE

Dans cette partie, la contrainte du programme d'optimisation de l'assureur est de contrôler la probabilité de ruine de la société. Il y a ruine de l'assureur lorsque les fonds propres sont réduits à 0, ou en d'autres termes, lorsque l'actif de la société ne suffit plus à couvrir les provisions.

[3] La condition (8) assure cette inégalité.

Notons τ l'instant de ruine de l'assureur :

$$\tau = \mathbf{Inf}\left\{ t \in \mathbf{N} \,\middle|\, E_t < 0 \right\} \tag{17}$$

τ est un temps d'arrêt par rapport à la filtration historique puisque c'est le temps d'entrée de la suite $\left(E_n\right)$ dans l'ensemble $\left]-\infty;0\right[$.

Le profit espéré provenant du régime de rentes étant croissant avec le rendement espéré du portefeuille financier et donc de la part investie en actif risqué, l'assureur va composer son portefeuille en fonction de la probabilité de ruine qu'il est prêt à accepter.

Le programme d'optimisation, que l'assureur doit résoudre, peut donc s'écrire :

$$\mathbf{Sup}\left\{ \theta \in \left[0;1\right] \,\middle|\, \mathbf{P}_\theta\left(\tau < \infty\right) \le \pi_{\max} \right\} \tag{18}$$

Où π_{max} désigne la probabilité de ruine maximale que l'assureur peut accepter.

Les techniques de simulations permettent de résoudre simplement ce programme d'optimisation. En effet, en discrétisant le processus de prix de l'actif risqué, il est possible de générer des trajectoires du cours de cet actif. La part investie en actif risqué en 0 étant indépendante du cours de cet actif dans le futur, il est possible d'utiliser ces trajectoires pour différentes allocations initiales de manière à pouvoir comparer, sur les mêmes bases, les différentes allocations.

Dans notre cas, si N est le nombre de trajectoires simulées de l'actif risqué, en notant $e_k^n(\theta)$ le montant des fonds propres de la société à la date k, dans l'état du monde n, pour l'allocation initiale définie par θ, un estimateur empirique de la probabilité de ruine est :

$$1 - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\prod_{k\ge 1}\mathbf{1}_{[0;\infty[}\left(e_k^n(\theta)\right) \tag{19}$$

Le lecteur pourra se référer à Jacquemin et Planchet [2004] pour la génération de réalisations de variables aléatoires[4] et à Planchet et Thérond [2004a] pour la discrétisation de processus continus.

Pour notre exemple, nous avons généré 10 000 trajectoires de l'actif risqué. En faisant varier de 0% à 100% avec un pas de 0,05% la part initiale d'actif risqué, nous avons disposé de 2.10^7 « scénarios » qui nous ont permis de tracer le graphique 2.

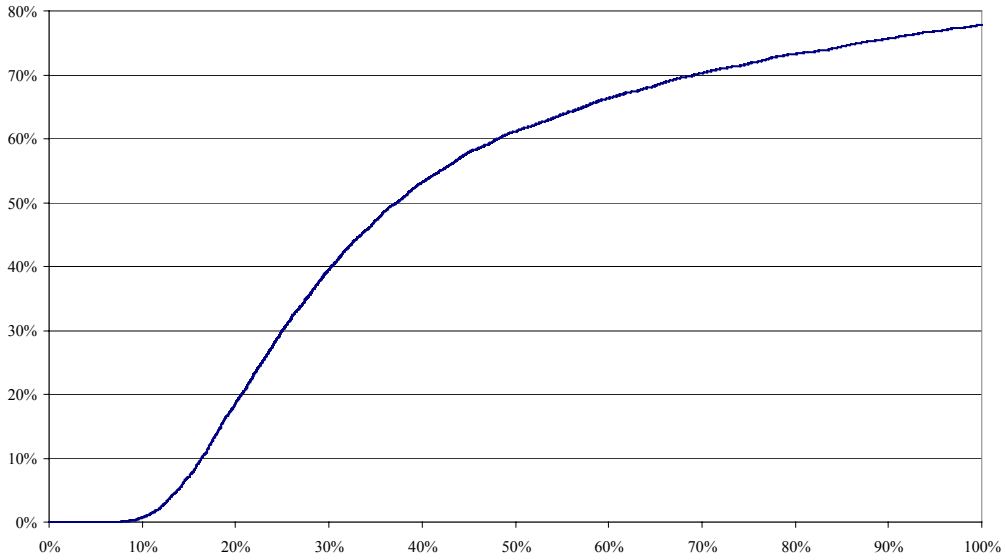
[4] Nous avons utilisé ici un générateur pseudo-aléatoire pour générer des réalisations de v.a. de loi uniforme qui ont été transformées par la technique de Box-Muller en réalisations de v.a. de loi normale.

Pour les illustrations numériques, nous utiliserons les paramètres suivants[5] :

$$E_0 = 4\% * L_0 \qquad r = \ln\{1 + 4{,}62\%\} \approx 4{,}52\%$$

$$\sigma = 25\% \qquad \mu = \ln(1 + 6\%)$$

Si π_{max} = 1 %, l'assureur investira alors 10,47 % de ses provisions et de ses fonds propres en actif risqué. Le graphique suivant représente la probabilité de ruine en fonction de la part d'actif risqué du portefeuille financier à l'origine.



Graphique 2 : Probabilité de ruine en fonction de la part d'actif risqué

On notera la faible part d'actif risqué dans l'allocation optimale au regard des pratiques des sociétés d'assurance vie.

2.2. FONDS PROPRES ECONOMIQUES

Les dispositions réglementaires imposent de nombreuses contraintes aux assureurs :

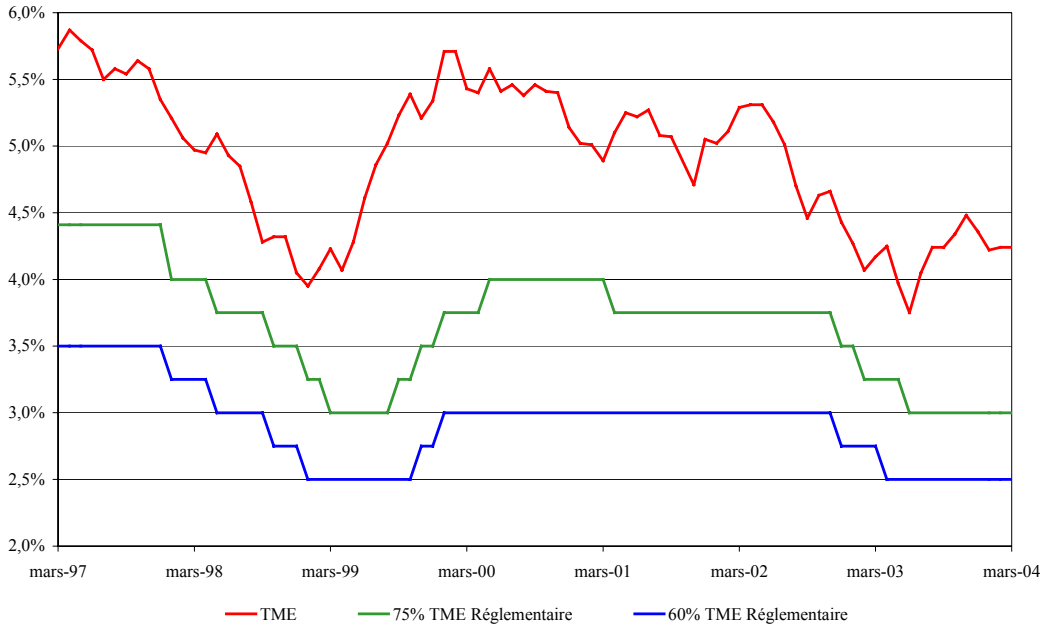
- ✓ Disposer d'un niveau minimal[6] de fonds propres.
- ✓ Escompter les flux futurs dans le calcul de la provision mathématique au taux maximal[7] de $\mathbf{Min}\{60\% * \text{TME} ; 3{,}5\%\}$.

[5] Le taux sans risque correspond au taux de maturité la duration du passif sur la courbe des taux au 31 décembre 2003 publiée par l'Institut des Actuaires (modèle de Vasicek & Fong).

[6] Le niveau des fonds propres initiaux est le minimum imposé par la marge de solvabilité en France : 4% des provisions mathématiques. Pour les contrats en unités de comptes, pour lesquels l'assureur n'assume pas de risque de placement, le marge de solvabilité est de 1% des provisions mathématiques. Cf. art. R.334–1 et suivants du Code des assurances.

[7] Par prudence, la réglementation française (cf. article A331–10 du Code des assurances) impose à l'assureur d'escompter ses provisions à un taux inférieur à Min (60% * TME ; 3,5%), où TME est le Taux Moyen des emprunts de l'Etat français.

Le graphique 3 reprend l'évolution du TME et des taux réglementaires qui y font référence.



Graphique 3 : Evolution du TME et des taux réglementaires de mars 1997 à mars 2004

Dans le cadre d'un contrat sans revalorisation des rentes, l'actionnaire tire son profit de deux sources : les revenus financiers générés par le capital et le résultat provenant de l'opération d'assurance à proprement parler. En effet, si le taux technique est inférieur au rendement réel des actifs, les provisions mathématiques vont générer des profits.

Notons Λ_θ la variable aléatoire :

$$\Lambda_\theta = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{F_t}{\theta X_t + (1-\theta) Y_t} \tag{20}$$

Cette variable aléatoire est la valeur limite de la quantité utilisée dans le membre de droite de l'équation (10). $\mathbf{E}[\Lambda_\theta]$ peut s'interpréter comme la provision mathématique « économique » du régime de rentes, *i.e.* la valeur probable des flux futurs actualisés au taux de rendement du portefeuille financier. En effet, si l'on note $\tilde{R}_t(\theta)$ le rendement du portefeuille d'actifs entre les dates t-1 et t, il vient :

$$\Lambda_\theta = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{F_t}{\prod_{s=1}^{t} \left(1 + \tilde{R}_s(\theta)\right)} \tag{21}$$

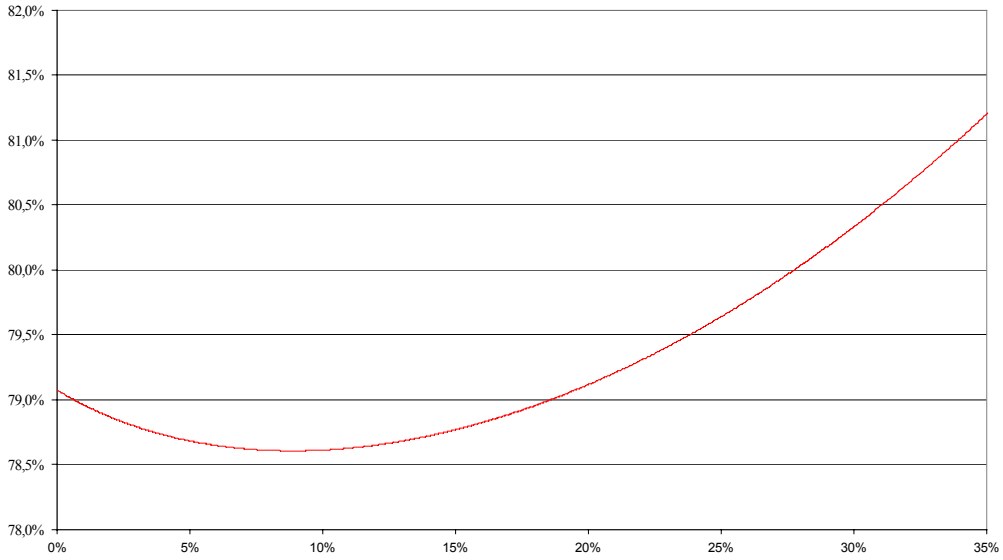
Minimiser $\mathbf{E}[\Lambda_\theta]$ revient à choisir l'allocation qui, en moyenne, « amortira » au mieux les flux de prestations futurs.

Notons que L_0 et E_0 étant fixés, minimiser $\mathbf{E}\left[\Lambda_\theta\right]$ revient également à maximiser les fonds propres économiques $\left(E_0 + L_0 - \mathbf{E}\left[\Lambda_\theta\right]\right)$.

Il est donc possible d'écrire le programme d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{Inf}\ \mathbf{E}\left[\Lambda_\theta\right] \\ \theta \in \left[0;1\right] \end{cases} \tag{22}$$

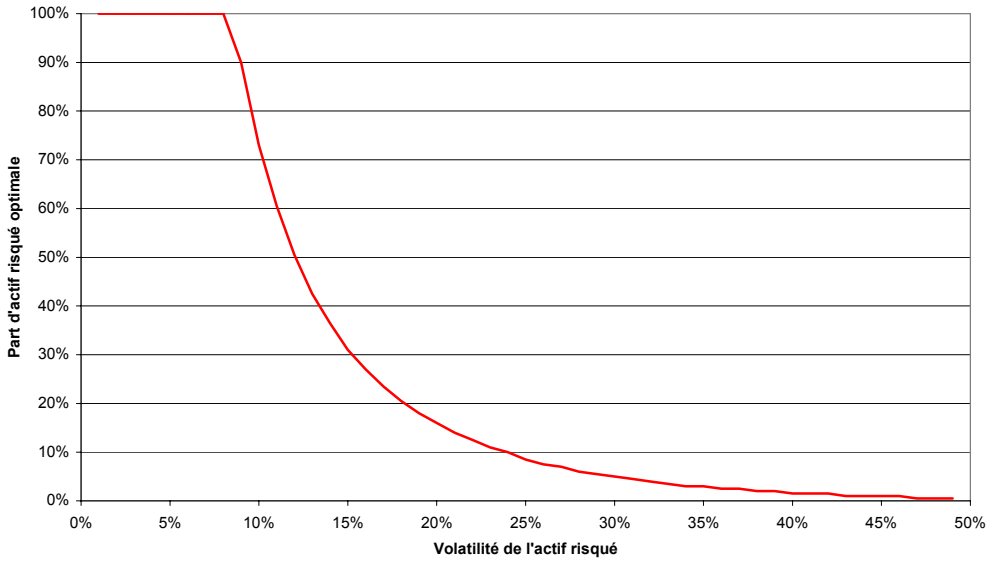
Par la suite, nous désignerons ce programme comme étant le « critère de l'actionnaire » en cela qu'il a pour effet de maximiser les fonds propres économiques en 0. Les techniques de Monte-Carlo permettent de résoudre ce problème :



Graphique 4 : Provision mathématique économique (en pourcentage de L_0) en fonction de la part d'actif risqué

Avec les mêmes paramètres que précédemment, la valeur optimale de θ est 8,85 %. Cette proportion initiale investie en actif risqué correspond à une probabilité de ruine de 0,3 %. Ce modèle apparaît en ce sens plus contraignant que le critère de la probabilité de ruine. Par construction, il induit une bonne adéquation des flux d'actif et de passif. Enfin, il présente l'avantage de ne pas avoir à fixer à priori, de manière arbitraire, la probabilité de ruine. La probabilité de ruine de l'allocation déterminée sera juste contrôlée *ex post*.

De la même manière que l'allocation qui contrôle une probabilité de ruine, l'allocation définie par la maximisation des fonds propres économiques est très sensible à la volatilité de l'actif risqué.

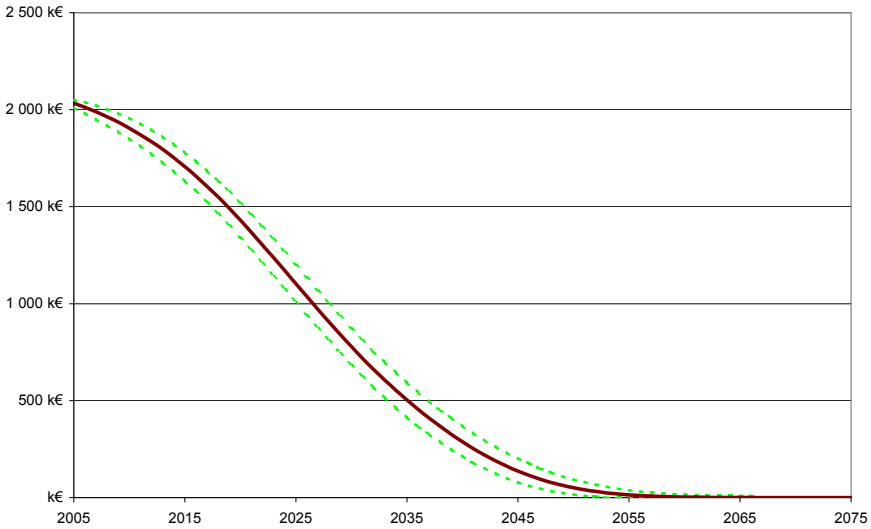


Graphique 5 : Allocation optimale en fonction de la volatilité de l'actif risqué

On remarque que jusqu'à 8% de volatilité de l'actif risqué, l'allocation optimale est de 100% puisque la sur-performance du rendement bon de capitalisation par rapport au taux technique permet de payer les rentes. Cette allocation décroît ensuite avec la volatilité jusqu'à devenir nulle pour $\sigma = 50\%$.

3. FLUX DE PRESTATIONS ALEATOIRES

Dans ce paragraphe, les flux de prestations sont aléatoires : ils dépendent de l'évolution démographique du groupe de rentiers. Le graphique suivant présente l'intervalle de confiance à 95% des prestations futures.



Graphique 6 : Intervalle de confiance à 95% des flux de prestations futurs

Cet intervalle est relativement étroit du fait de la bonne mutualisation des décès. Après avoir étudié la part du risque de mortalité dans le risque global, nous examinons l'impact de sa prise en compte sur l'allocation d'actifs.

3.1. ANALYSE DU RISQUE

Considérons la provision mathématique « économique » $\mathbf{E}\left[\Lambda_\theta\right]$. Lorsque les flux de prestations ne sont pas connus en 0, Λ_θ peut s'écrire :

$$\Lambda_\theta = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\widetilde{F}_t}{\theta X_t + (1-\theta) Y_t} \tag{23}$$

La variance de Λ_θ peut être proposée comme indicateur du risque global du portefeuille. Sa décomposition nous permet d'apprécier les parts respectives des risques financiers et de mortalité. En effet, en conditionnant Λ_θ par l'évolution des placements, nous avons la décomposition suivante :

$$\mathbf{V}\left[\Lambda_\theta\right] = \mathbf{E}\left[\mathbf{V}\left(\Lambda_\theta \middle| X\right)\right] + \mathbf{V}\left[\mathbf{E}\left(\Lambda_\theta \middle| X\right)\right] \tag{24}$$

Où X est le cours de l'actif risqué.

Le premier terme du membre de droite de l'expression (24) représente le risque financier associé au régime de rentes ; le second terme le risque technique de mortalité.

Via des techniques de simulations, en faisant l'hypothèse (réaliste) d'indépendance entre l'évolution des actifs et la mortalité, on peut générer N trajectoires d'actifs risqués, M trajectoires de passif et disposer ainsi de $N*M$ « états du monde » pour chaque θ.

Si $\lambda_{n,m}(\theta)$ est la réalisation de Λ_θ résultant de la n-ième trajectoire de l'actif risqué, de la m-ième trajectoire du passif, notons :

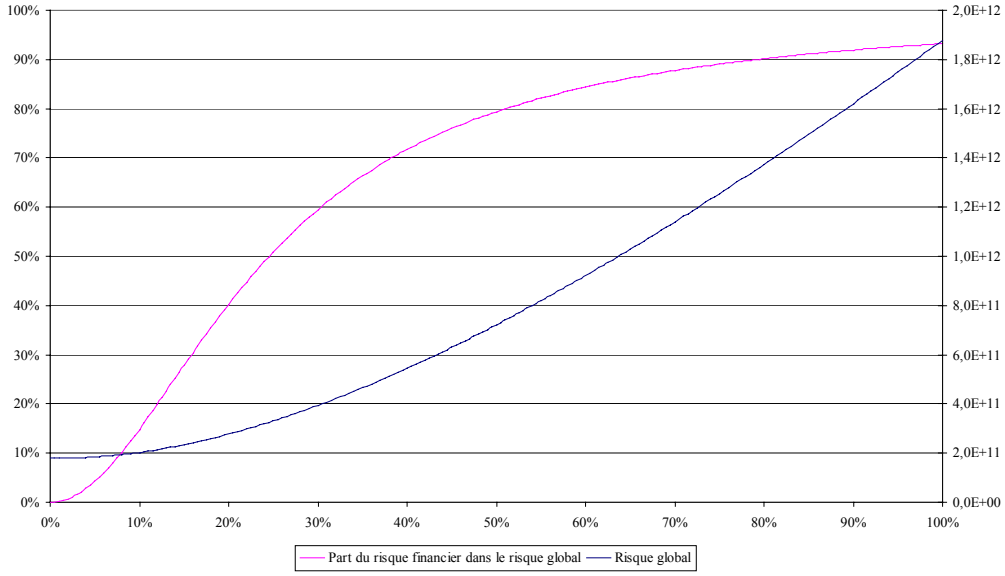
- ✓ $\bar{\lambda}_n(\theta) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} \lambda_{n,m}(\theta)$
- ✓ $\bar{\bar{\lambda}}(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \bar{\lambda}_n(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} \lambda_{n,m}(\theta)$

Les quantités (25) et (26) ci-après sont des estimateurs sans biais et convergents respectivement de $\mathbf{E}\left[\mathbf{V}\left(\Lambda_\theta \middle| X\right)\right]$ et de $\mathbf{V}\left[\mathbf{E}\left(\Lambda_\theta \middle| X\right)\right]$.

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{M-1}\sum_{m=1}^{M}\left(\lambda_{n,m}(\theta)-\bar{\lambda}_n(\theta)\right)^2 \tag{25}$$

$$\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}\left(\bar{\lambda}_n(\theta)-\bar{\bar{\lambda}}(\theta)\right)^2 \tag{26}$$

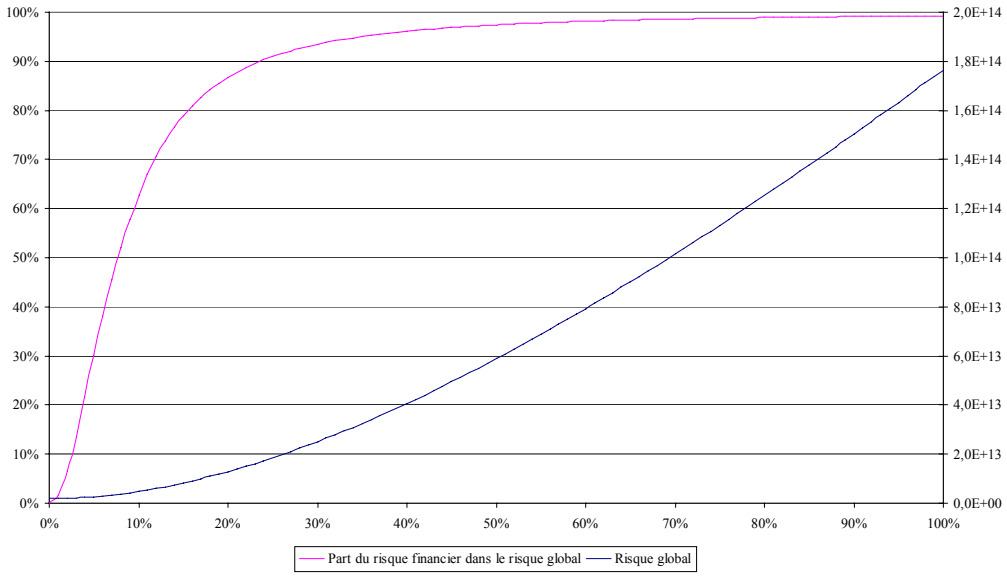
Ces résultats nous permettent d'obtenir le graphique 7 d'évolution du risque global associé au régime de rentes et d'évolution du risque financier dans le risque global en fonction du choix de portefeuille initial.



Graphique 7 : Evolution du risque et de la part du risque financier dans le risque global en fonction de θ

Le risque associé au régime est près de 10 fois plus important lorsque l'actif est exclusivement composé d'actif risqué que lorsqu'il est uniquement composé du bon de capitalisation. On observe que le risque technique reste non négligeable (>5%), quelle que soit l'allocation initiale. Ceci s'explique par le fait que la mutualisation ne joue pas pleinement son rôle à cause du nombre limité de rentiers. Le tableau 1 *infra* présente les parts du risque financier pour les allocations trouvées précédemment.

Avec un portefeuille de rentiers (ayant les mêmes caractéristiques) dix fois plus important en nombre, nous aurions obtenu le graphique suivant :



Graphique 8 : Evolution du risque et de la part du risque financier dans le risque global en fonction de θ pour un portefeuille de rentiers dix fois plus important

La comparaison des graphiques 7 et 8 permet d'observer l'effet de la mutualisation. En effet, quel que soit θ, le risque global est toujours moins de 100 fois plus important lorsqu'il y a 3 740 individus que lorsqu'il y en a dix fois moins.

De ce fait, la part du risque financier dans le risque global est nettement plus importante que dans le cas précédent, ceci résulte du fait que le risque démographique est mutualisable et donc décroissant (en pourcentage) avec l'effectif alors que le risque financier est constant (en pourcentage) avec l'effectif.

Le tableau *infra* récapitule l'impact de la mutualisation sur les allocations déterminées en 2.1et 2.2.

	Part du risque financier dans le risque global	**Part du risque financier dans le risque global (portefeuille x10)**
θ = 8,85 %	12 %	53 %
θ = 10,47 %	16 %	65 %

Tableau 1 : Effet de la mutualisation sur la part du risque financier

Au notera que, compte tenu de la proportion d'actif risqué relativement faible, le risque purement « assurantiel » est significatif dans tous les cas de figure.

3.2. CRITERES D'ALLOCATION

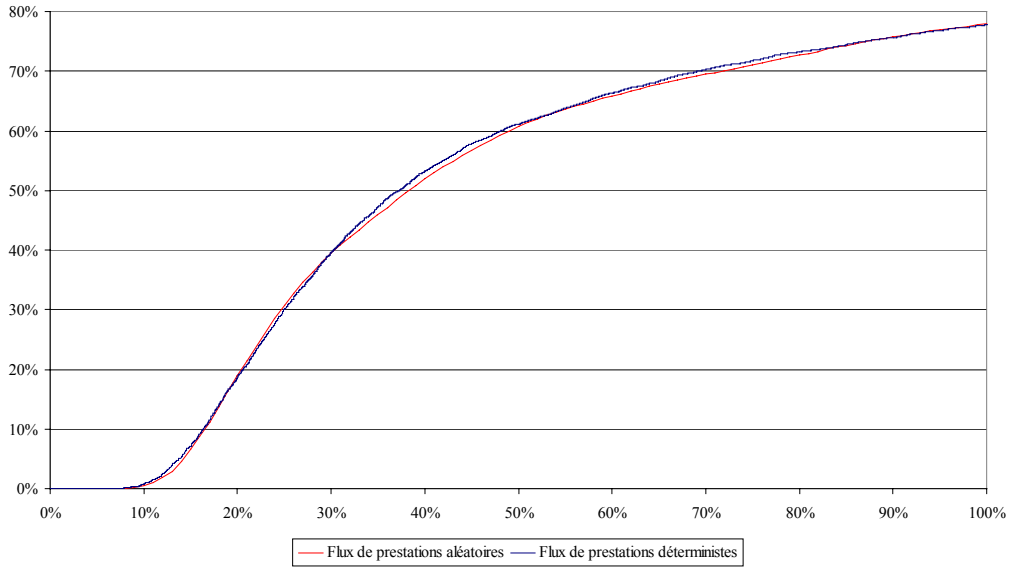
Dans cette partie, nous étudions l'impact de la prise en compte du risque de mortalité sur les critères d'allocation proposés dans le paragraphe 2.

3.2.1. Probabilité de ruine

Si $e_k^{n,m}(\theta)$ est le niveau de fonds propres à la date k, dans l'état du monde n x m pour l'allocation θ, l'expression *infra* est un estimateur de la probabilité de ruine :

$$1 - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\prod_{k\geq 1}\mathbf{1}_{[0;\infty[}\left(e_k^{n,m}(\theta)\right) \qquad (27)$$

Avec les mêmes paramètres que précédemment (cf. 2.1), nous obtenons la courbe suivante :



Graphique 9 : Probabilité de ruine en fonction de la part d'actif risqué

La courbe de la probabilité de ruine intégrant la nature aléatoire de la mortalité est pratiquement confondue avec celle obtenue en 2.1. Cela semble indiquer que la prise en compte de la nature aléatoire des flux de prestations affecte peu, dans le cas présent, l'allocation d'actifs déterminée à partir du critère de la probabilité de ruine.

Ce résultat est toutefois peu intuitif puisque la prise en compte de la mortalité augmente le risque global (au travers d'une augmentation de la variance), les effets dus aux variations de la mortalité se compensent donc en moyenne.

3.2.2. Fonds propres économiques

Les flux de prestations et les rendements des actifs financiers étant indépendants, on a :

$$\mathbf{E}\left[\Lambda_\theta\right] = \mathbf{E}\left[\sum_{t=1}^{\infty} \frac{\widetilde{F}_t}{\theta X_t + (1-\theta) Y_t}\right] = \sum_{t=1}^{\infty} \mathbf{E}\left[\frac{1}{\theta X_t + (1-\theta) Y_t}\right] * \mathbf{E}\left[\widetilde{F}_t\right] \tag{28}$$

Donc le programme d'optimisation qui consiste à maximiser le capital économique en 0 aura, lorsque les flux de prestations sont aléatoires, la même solution que lorsque ces flux sont connus en 0. Cette propriété est un avantage de ce critère puisque la prise en compte du risque de mortalité s'avère gourmande en temps de simulations.

3.2.3. Conclusion

Bien que non négligeable au vu du faible nombre de rentiers, le risque de mortalité n'affecte pas le choix de portefeuille au sens des deux critères exposés. Ce résultat est d'autant plus intéressant que la prise en compte du risque technique dans le critère de la probabilité de ruine demande des temps de calculs importants. En effet générer une simulation du passif nécessite de générer une trajectoire de mortalité pour chacun des 374 individus et de réévaluer le montant de la provision mathématique à chaque date en fonction des effectifs encore sous risque, le nombre de variables à simuler est donc très important.

4. REVALORISATION DES RENTES

Nous avons jusqu'à présent supposé que les rentes n'étaient pas revalorisées ; ceci n'est bien entendu pas réaliste, et il est nécessaire que le régime prévoie des règles de revalorisation des pensions. Les deux formes de revalorisations que l'on observe le plus fréquemment dans les régimes de pensions de retraite sont la revalorisation alignée sur l'évolution des salaires ou celle visant à maintenir le pouvoir d'achat des retraités. A long terme, ce genre de dispositif n'est pas neutre, puisque pour autant que la croissance perdure, l'évolution des prix est généralement inférieure à la croissance des salaires. Dans ce paragraphe, nous supposerons que les rentes sont revalorisées de manière à tenir compte de l'inflation, pour maintenir le pouvoir d'achat des rentes.

Notons I_t l'indice des prix à la consommation à la date t et L_t^I le montant de la provision mathématique à la date s. Cette quantité s'obtient[8] par :

[8] Le fait d'introduire un processus de revalorisation des rentes liés à l'évolution de l'inflation ne modifie pas l'approche de valorisation des flux futurs probables sous la probabilité historique retenue dans cet article

$$L_s^I = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}\left[\widetilde{F}_{s+k} * \frac{I_{s+k}}{I_s} \middle| \Phi_s \right]}{(1+i)^k} \tag{29}$$

En faisant l'hypothèse réaliste d'indépendance entre l'évolution de la mortalité et celle des prix, il vient :

$$L_s^I = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}\left[\widetilde{F}_{s+k} \middle| \Phi_s\right] * \mathbf{E}\left[\frac{I_{s+k}}{I_s} \middle| \Phi_s \right]}{(1+i)^k} \tag{30}$$

La revalorisation des rentes représente un engagement supplémentaire pour l'assureur donc la provision mathématique de l'assureur sera plus importante que lorsque les rentes n'étaient pas revalorisées :

$$L_0^I \geq L_0 \tag{31}$$

La quantité $L_0^I - L_0$ peut alors s'interpréter comme la valeur en 0 de l'engagement de revaloriser les rentes de manière à maintenir le pouvoir d'achat des bénéficiaires.

4.1. MODELISATION DE L'INFLATION

Supposons que l'indice des prix à la consommation évolue de la manière suivante :

$$I_{t+\delta} = I_t * \mathbf{exp} \int_t^{t+\delta} (j + x_s) ds \tag{32}$$

Où j est le taux instantané moyen d'évolution des prix et :

$$dx_s = -a\, x_s\, ds + \sigma_I\, dB_s^I \tag{33}$$

Où B^I est un mouvement brownien sous la probabilité historique **P**.

On cherche donc à calculer la quantité :

$$\mathbf{E}\left[\frac{I_{t+\delta}}{I_t} \middle| \Phi_t \right] = \mathbf{E}\left[\mathbf{exp} \int_t^{t+\delta} (j + x_s) ds \middle| \Phi_t \right] = e^{j\delta}\, \mathbf{E}\left[\mathbf{exp} \int_t^{t+\delta} x_s\, ds \middle| \Phi_t \right] \tag{34}$$

x est un processus d'Ornstein-Ulhenbeck, donc x_s est une variable aléatoire gaussienne dont on peut calculer moyenne et variance :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[x_s\right] &= x_0\, e^{-as} \\ \mathbf{V}\left[x_s\right] &= \sigma_I^2 \frac{1-e^{-2as}}{2a}\end{aligned} \tag{35}$$

$\int_t^{t+\delta} x_s\, ds$ est une gaussienne puisqu'il s'agit de la limite d'une somme de variables aléatoires gaussiennes. L'expression de la transformée de Laplace d'une gaussienne[9] nous permet d'écrire :

$$\mathbf{E}\left[\exp\int_t^{t+\delta} x_s\, ds \,\middle|\, \Phi_t\right] = \exp\left\{\mathbf{E}\left[\int_t^{t+\delta} x_s\, ds \,\middle|\, \Phi_t\right] + \frac{1}{2}\mathbf{V}\left[\int_t^{t+\delta} x_s\, ds \,\middle|\, \Phi_t\right]\right\} \tag{36}$$

Comme[10] :

$$\mathbf{E}\left[\int_t^{t+\delta} x_s\, ds \,\middle|\, \Phi_t\right] = x_t \frac{1-e^{-a\delta}}{a} \tag{37}$$

Et :

$$\mathbf{V}\left[\int_t^{t+\delta} x_s\, ds \,\middle|\, \Phi_t\right] = \frac{\sigma_I^2}{a^2}\left(\delta - \frac{1-e^{-a\delta}}{a} - \frac{\left(1-e^{-a\delta}\right)^2}{2a}\right) \tag{38}$$

Il vient :

$$\mathbf{E}\left[\exp\int_t^{t+\delta} x_s\, ds \,\middle|\, \Phi_t\right] = \exp\left\{x_t \frac{1-e^{-a\delta}}{a} + \frac{\sigma_I^2}{2a^2}\left(\delta - \frac{1-e^{-a\delta}}{a} - \frac{\left(1-e^{-a\delta}\right)^2}{2a}\right)\right\} \tag{39}$$

Enfin :

$$\mathbf{E}\left[\frac{I_{t+\delta}}{I_t} \,\middle|\, \Phi_t\right] = \exp\left\{j\delta + x_t \frac{1-e^{-a\delta}}{a} + \frac{\sigma_I^2}{2a^2}\left(\delta - \frac{1-e^{-a\delta}}{a} - \frac{\left(1-e^{-a\delta}\right)^2}{2a}\right)\right\} \tag{40}$$

Le nouveau montant de la provision mathématique en 0 est donc donné par :

---

[9] Rappelons que si ε est une variable aléatoire de loi N(m,σ^2), $\mathbf{E}\left[\exp\left(z * \varepsilon\right)\right] = \exp\left\{zm + z^2 \frac{\sigma^2}{2}\right\}$.

[10] Cf. Lamberton et Lapeyre [1997] pour le détail des calculs.

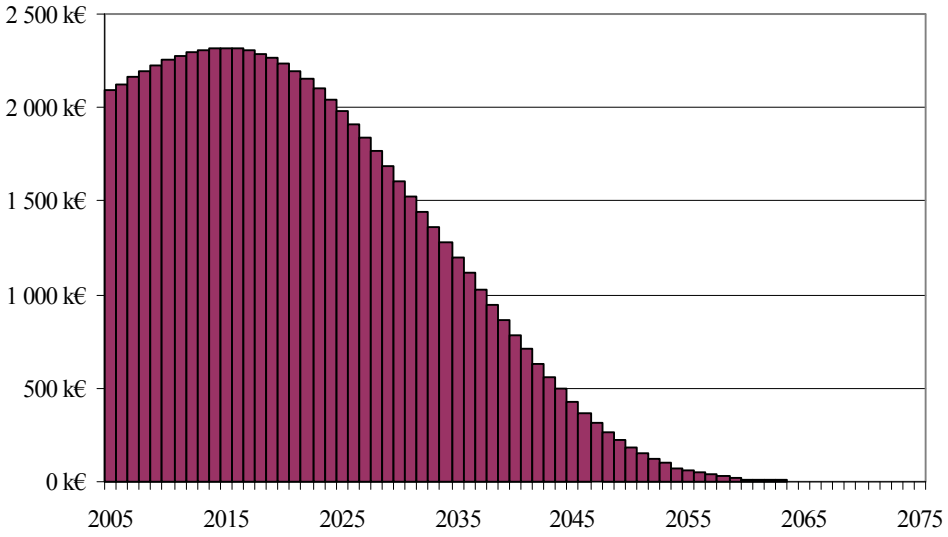
$$L_0^I = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}\left[\widetilde{F}_k \,\middle|\, \Phi_0\right] * \exp\left\{ jk + x_0 \frac{1-e^{-ak}}{a} + \frac{\sigma_I^2}{2a^2}\left(k - \frac{1-e^{-ak}}{a} - \frac{\left(1-e^{-ak}\right)^2}{2a} \right) \right\}}{\left(1+i\right)^k} \qquad (41)$$

Nous retiendrons pour les applications numériques, les paramètres estimés par Fargeon et Nissan [2003] sur les données de l'inflation française depuis janvier 1990, soit :

j = 0,0279 a = 0,2631 σ_I = 0,0056 x_0 = 0

On obtient alors un montant de provision mathématique initiale de 47,9 M€. Le processus de revalorisation des rentes conduit donc à augmenter l'engagement de l'assureur de 46 %. Le poids relatif de la revalorisation est donc très important. L'assureur devra augmenter d'autant la part de ses fonds propres alloués au régime.

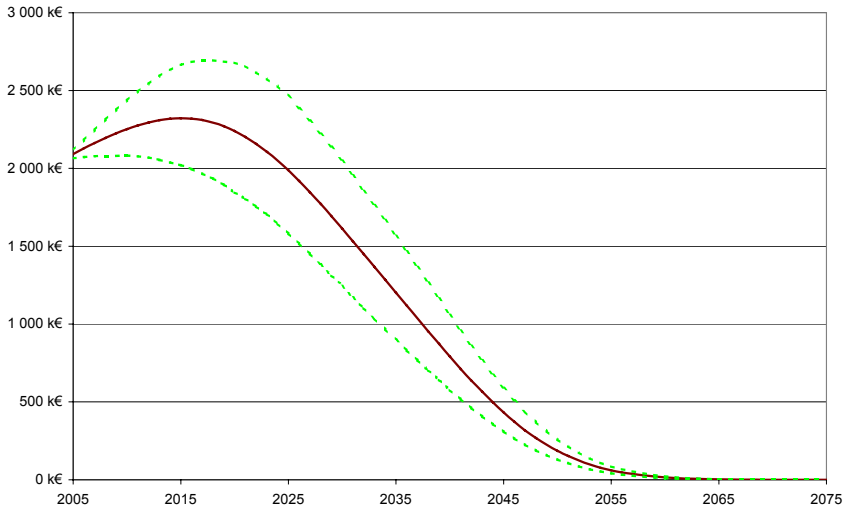
Par ailleurs les flux espérés en 0 ont l'allure suivante :



Graphique 10 : Flux de prestations espérés

La courbe des flux futurs n'est plus strictement décroissante comme dans la cas où il n'y avait pas de revalorisation. En effet c'est l'année 2015 qui, en moyenne, verra le débours le plus important. La duration du passif augmente sensiblement pour s'établir à 14,9 ans.

Cette suite de flux est toutefois très volatile puisque l'intervalle de confiance autour de cette courbe est très large en comparaison avec celui obtenu lorsque les rentes ne sont pas revalorisées.



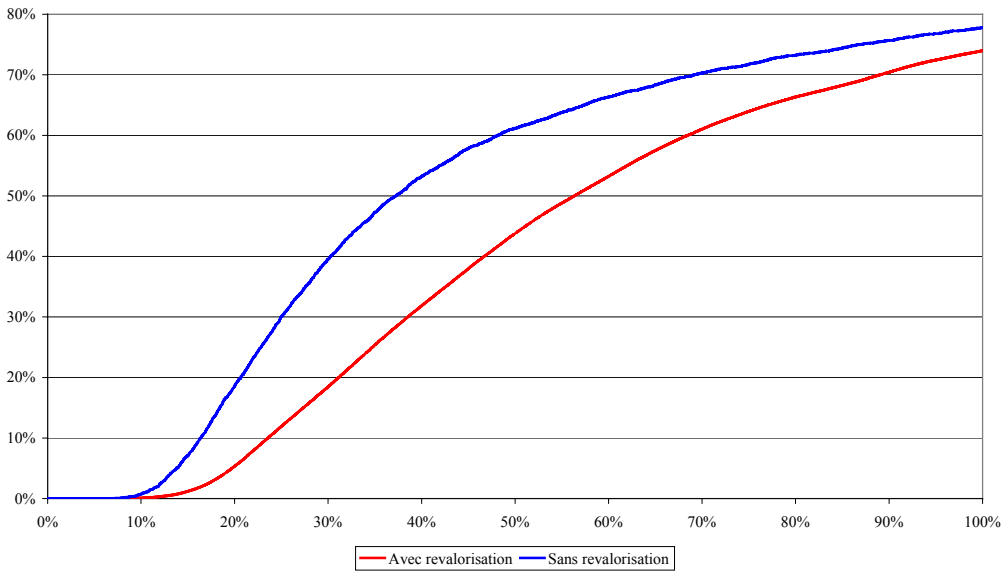
Graphique 11 : Flux de prestations revalorisées – intervalle de confiance à 95%

La largeur de cet intervalle provient du fait que le risque d'inflation n'est pas mutualisable.

4.2. ALLOCATION D'ACTIFS

Dans cette partie, nous ferons l'hypothèse de parfaite mutualisation des décès et donc que les flux de passif sont connus en 0. En effet les illustrations du paragraphe 3 nous ont permis d'observer que la mortalité n'a pas d'impact dans l'allocation déterminée par le critère des fonds propres économiques et un impact négligeable dans l'allocation déterminée à partir de la probabilité de ruine.

4.2.1. Probabilité de ruine

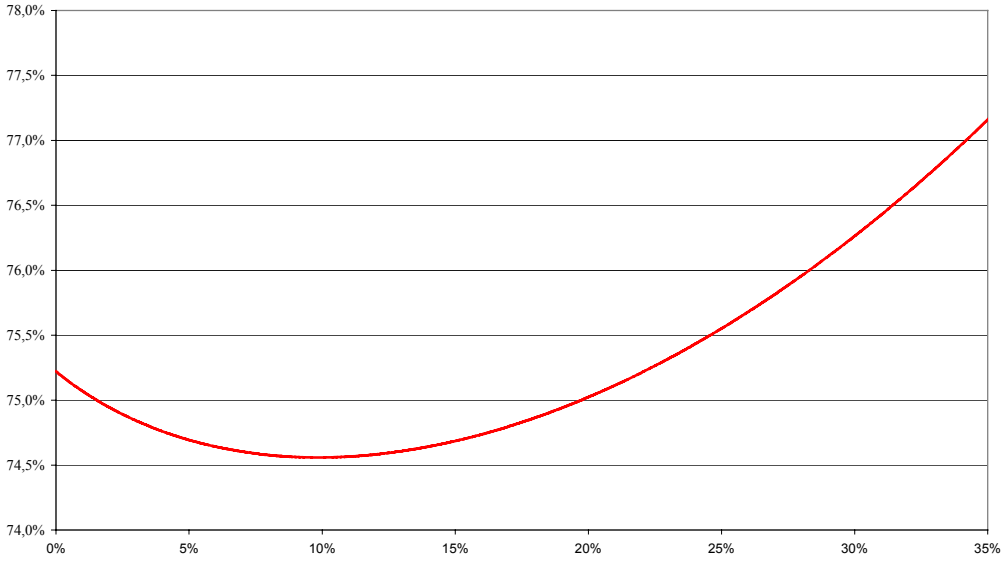


Graphique 12 : Probabilité de ruine en fonction de la part d'actif risqué

Quelle que soit l'allocation en actif risqué, la probabilité de ruine est inférieure à celle obtenue lorsque les rentes n'étaient pas revalorisées. Bien que l'assureur supporte le risque supplémentaire de voir l'inflation augmenter de manière importante et de ne pas disposer d'assez de réserves pour faire face à ses engagements, l'augmentation de la duration du passif et par là de la durée de vie moyenne de l'actif joue en faveur de l'investissement en actif risqué. Ainsi, l'augmentation de la durée du passif est un facteur favorisant l'investissement en actif risqué.

4.2.2. Fonds propres économiques

Quelle que soit l'allocation initiale, le niveau de la provision mathématique économique est inférieur à ce qu'il était sans revalorisation des rentes (cf. graphique 4).



Graphique 13 : Provision mathématique économique (en pourcentage de L_0) en fonction de la part d'actif risqué

Un minimum est atteint pour $\theta = 9{,}85\%$. Cette allocation est à comparer aux 8,85% obtenus dans le cas où les rentes ne sont pas revalorisées. Cette augmentation de la part d'actif risquée est la conséquence de l'augmentation de la duration du passif, comme dans le cas précédent.

4.3. Utilisation des OATi

En présence d'inflation, il peut sembler judicieux d'intégrer dans la modélisation des titres obligataires indexés sur l'inflation, les OATi.

La prise en compte de cet instrument financier dans le modèle dépasse le cadre du présent article et sera traitée ultérieurement.

5. CONCLUSION

L'application des techniques de simulation à des portefeuilles réels permet de proposer des allocations stratégiques d'actifs intégrant des critères plus complexes, et sans doute mieux adaptés à l'activité de l'assurance vie, que le traditionnel modèle de Markowitz et ses dérivés.

Le présent article propose en particulier deux modèles intégrant la duration longue des passifs d'assurance vie, et présentant l'avantage d'une bonne robustesse face à l'aléa démographique. Les versions simplifiées à deux actifs présentées ici peuvent être aisément étendues au cas de plusieurs actifs, avec des modélisations plus complexes que le simple mouvement brownien géométrique, retenu uniquement pour la simplicité de l'exposé.

Notre objectif était ici de proposer un critère d'allocation qui soit aisé à mettre en œuvre, adaptable à des portefeuilles financiers complexes grâce à l'apport des techniques de Monte-Carlo, ne nécessitant pas de paramètre externe dont la détermination serait délicate (ex: le niveau de la probabilité de ruine : 0,1%, 1%, 5% ?), et qui enfin soit robuste aux diverses variantes de la modélisation. Nous avons tenté de montrer que le critère de maximisation des « fonds propres économiques » que nous proposons est un bon candidat.

Nous proposons dans un second article en cours de rédaction une version du modèle relâchant la plupart des hypothèses simplificatrices effectuées ici ; ce modèle intègre notamment un modèle de taux, des obligations indexées sur l'inflation, un ajustement annuel de l'allocation, la corrélation entre les actifs ainsi qu'une participation au bénéfice. La prise en compte de ces éléments ne modifie toutefois pas les conclusions du présent article.

RÉFÉRENCES

ASSOCIATION ACTUARIELLE INTERNATIONALE [2004] "A Global Framework for Insurer Solvency Assessment". www.actuaires.org

BATTOCHIO P., MENONCIN F., SCAILLET O. [2004] "Optimal asset allocation for pension funds under mortality risk during the accumulation and decumulation phases", forthcoming in *Annals of Operations Research*.

BOYLE P., WINDCLIFF H. [2004] "The 1/n pension investment puzzle", soumis au *North American Actuarial Journal*.

FARGEON L., NISSAN K. [2003] "Recherche d'un modèle actuariel d'analyse dynamique de la solvabilité d'un portefeuille de rentes viagères". Groupe de travail ENSAE.

GAUTRON N., PLANCHET F., THEROND P. [2004] "Méthodes financières et allocation d'actifs en assurance". *Finance*, à paraître.

JACQUEMIN J., PLANCHET F. [2004] “Méthodes de simulation”. *Bulletin Français d’Actuariat*, Vol. 6, n°11.

LAMBERTON D., LAPEYRE B. [1997] *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, 2nde Edition. Paris : Ellipses.

MARKOWITZ H. [1952] “Portfolio Selection”. *Journal of Finance*, Vol. 7, n°1.

MARKT/2543/03 [2004] “Organisation du travail, discussion sur des sujets pilier 1 et suggestions de demandes d'avis à CEIOPS sur des sujets pilier 2” – Document de travail pour la réunion du sous-comité "Solvabilité" du Comité des assurances du 12 mars 2004.

PLANCHET F., THEROND P. [2004a] “Simulation de trajectoires de processus continus”. Working Paper ISFA.

PLANCHET F., THEROND P. [2004b] “Critères d’allocation d’actifs pour un régime de rentiers”. Conférence scientifique de l’Institut des Actuaires, Paris, 1er juillet 2004.

QUITTARD-PINON F. [2002] *Mathématiques financières*. Paris : Editions EMS.