Le risque de modèle

Thomas LALLEMENT Ecaterina NISIPASU

Mihaela TOPUZU Leila ELBAHTOURI

1 Octobre 2014

Abstract

" *Tous les modèles sont faux, mais certains sont utiles* " – Georges Box

Solvabilité II est un projet de réforme européenne de la réglementation prudentielle s'appliquant au secteur de l'assurance et de la réassurance. Sa date d'entrée en application a été fixée au début 2016 par le Parlement Européen. L'intérêt de cette réforme est de garantir l'équilibre entre la protection des assurés des sociétés d'assurance et de réassurance, et le capital.

Les autorités de contrôle prudentiel exigent de la part de ces compagnies de disposer d'un capital suffisant pour éviter la ruine à un an avec une probabilité de 99,5 %. Ce capital requis est appelé Solvency Capital Requirement (SCR). La détermination de ce capital est une tâche plus ou moins compliquée, et son calcul repose sur des modèles souvent assez complexes dont l'application se fait parfois en supposant la validité des hypothèses des modèles considérés alors que les tests statistiques ne les confirment pas systématiquement. D'une manière générale, les modèles ne représentent qu'une simplification de la réalité et non la réalité même. Le choix d'un modèle peut donc induire des erreurs dans l'évaluation du risque et être à l'origine de risque de modèle.

Dans ce contexte, le risque de modèle est un enjeu majeur dans la maîtrise des risques des compagnies d'assurance et de réassurance. Cette notion peut avoir des impacts directs sur la solvabilité des organismes mais la quantification précise d'un tel risque reste aujourd'hui une problématique encore très peu abordée dans le monde assurantiel et la littérature actuarielle.

Cet article synthétise un mémoire d'actuariat réalisé au sein du département Modélisation Actuarielle du groupe SCOR[1] dont l'enjeu est de proposer une première approche pour évaluer le risque de modèle à travers deux applications différentes: la première sur la modélisation d'un actif financier, et la seconde sur l'estimation de la charge ultime d'un modèle de provisionnement non-vie.

Mots-clés : Solvabilité II, Risque de modèle, validité des modèles, risque de spécification, modèle actif, modèle de provisionnement non-vie

[1]SCOR SE 5, Avenue Kléber, 75795 Paris Cedex 16

Introduction

Toute société d'assurance ou de réassurance possède un cycle de production inversé car l'acquisition des primes se fait avant d'avoir pris connaissance des paiements qu'elle devra effectuer pour compenser les sinistres qui surviendront. Ce cycle oblige les sociétés à anticiper les risques auxquels elles sont soumises, et leur quantification se fait par le biais de différents modèles et méthodes actuarielles et financières.
Dans le cadre du projet européen Solvabilité II, la précision des modèles et les mesures de risque utilisées sont des éléments essentiels pour le calcul de la solvabilité de toute compagnie d'assurance et de réassurance. Les décisions prises sur la base de ces modèles assurantiels aussi bien pour la tarification, pour le calcul des réserves ou encore pour la projection des actifs financiers de la compagnie dépendent essentiellement des résultats statistiques des modèles calibrés et des jugements d'experts. Souvent les données disponibles ne permettent pas de valider les hypothèses des modèles et d'estimer de manière précise leurs paramètres. Les jugements alors basés sur ces modèles sont donc biaisés et peuvent ainsi induire des erreurs dans le choix du modèle approprié pour la détermination précise du capital requis.

L'objet de cet article est de proposer une première estimation de l'erreur due à la mauvaise spécification du modèle, erreur connue dans la littérature comme risque de modèle. L'objectif principal est de trouver une approche permettant d'évaluer le risque de modèle pour pouvoir ainsi déterminer l'adéquation des modèles aux différentes typologies de risques du groupe SCOR.
La littérature à ce sujet reste succincte dans le domaine assurantiel. Peu de travaux proposent d'aborder cette problématique, et notre proposition s'appuie sur ces derniers et sur les avis actuariels proposés par les membres des équipes actuarielles du groupe.

La première partie de cet article propose un point de vue général de la perception du risque de modèle à travers la mise en évidence des différentes sources associées à ce risque, et des méthodes possibles de quantification.
La deuxième partie présente deux applications avec une première quantification du risque de modèle sur un modèle d'actif financier, où la quantité de données mise à notre disposition était plus significative et permettait de pouvoir calibrer d'une manière plus adéquate les modèles, et une seconde quantification du risque de modèle sur un modèle de provisionnement non-vie, où la quantité de données était moins significative et par conséquent le risque d'erreur plus probable.
Enfin, la dernière partie est consacrée à la présentation d'une amélioration de la méthode de quantification proposée dans cet article.

1 Le risque de modèle

1.1 Définition

Le risque de modèle fait intervenir comme son nom l'indique la notion de « risque ». Or parler de risque suppose, selon sa définition habituellement retenue, que l'on puisse identifier clairement sa provenance et être capable de quantifier une perte potentielle relative à celui-ci. De plus, la littérature actuelle ne définit pas le risque de modèle d'une manière précise et formelle. Les premiers à avoir évoqué ce risque dans le cadre de l'évaluation du capital ont été les acteurs du monde bancaire et financier, et ce afin de remettre en cause la pertinence des modèles financiers.
La définition proposée est la suivante : « Le risque de modèle est un type de risque qui se réalise lorsqu'un modèle financier, utilisé pour mesurer un risque de marché d'une entreprise ou la valeur de transactions financières, n'accomplit pas les tâches ou ne reflète pas correctement les risques pour lesquels il a été conçu ».

Dans un cadre assurantiel, une définition plus générale est celle proposée dans le papier[2] de Shaun Wang et al. : « Le risque de modèle peut provenir de diverses formes d'erreur, ou de la construction ou de l'utilisation d'un modèle inapproprié». Cette définition suppose que la source du risque de modèle n'est pas unique, et que pour limiter l'apparition d'un tel risque il faut clairement identifier ses sources potentielles et essayer de les maitriser.

1.2 Les sources du risque de modèle

Les sources du risque de modèle sont multiples et dépendent principalement de la nature des modèles et des données utilisées pour modéliser les risques. Il existe beaucoup de classes de modèles que l'on peut regrouper en trois catégories :

Le premier groupe concerne les modèles purement statistiques basés sur des observations historiques et des hypothèses mathématiques.
Le deuxième groupe concerne les modèles basés sur les hypothèses faites par des experts, autrement dit jugement d'expert (ou « Expert Judgement »).
Le troisième groupe concerne les modèles basés sur une combinaison des deux premiers groupes.

Actuellement, les modèles mis en place par les actuaires correspondent plutôt à la troisième catégorie citée c'est-à-dire avec une prise en compte d'hypothèses statistiques et de jugement d'expert. La fiabilité des modèles peut être souvent mise en doute à cause de leur incapacité à reproduire précisément la réalité observée et la meilleure alternative pour pallier à ce problème reste la combinaison d'avis statistiques et d'experts. Cependant une étude préalable des diverses sources potentielles du risque de modèle permet de suivre et de maitriser justement l'apparition d'un tel risque.

[2] Shaun Wang, Markus Stricker, Stephen J. Strommen. «Model Validation for Insurance Enterprise Risk and Capital Models.» 2014.

Les différentes sources potentielles associées au risque de modèle peuvent être les suivantes :

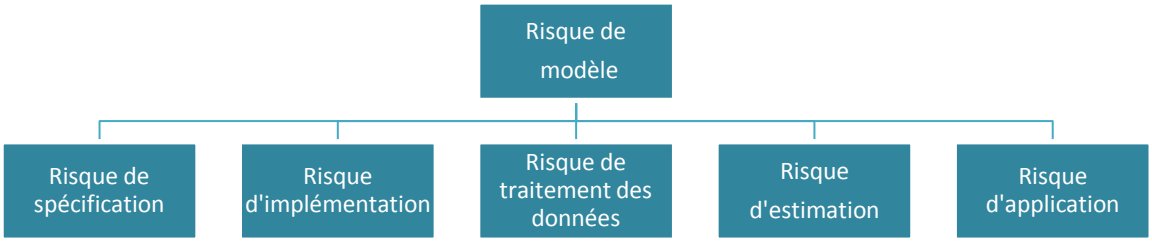

Figure 1 : Organigramme des sources potentielles du risque de modèle

Le risque de spécification

Le risque de spécification peut se définir comme le risque que le modèle choisi par l'actuaire pour évaluer un risque assurantiel ou financier soit inapproprié. Il y a deux cas de figures dans lesquels on peut considérer un modèle comme inapproprié :

- Si le modèle n'est pas adapté pour le type de risque que l'on souhaite étudié.
- Si le modèle est basé sur des hypothèses qui ne sont pas vérifiées en réalité.

C'est la raison pour laquelle l'actuaire doit se poser trois questions essentielles avant tout choix de modèle :

- Quel risque doit être modélisé ?
- Quelles sont les données à notre disposition ?
- Quels sont les modèles que nous pouvons appliquer pour modéliser ce risque ?

Le risque d'implémentation

Il existe deux formes de risque d'implémentation :

- Le risque qu'un mauvais choix d'algorithme soit effectué pour implémenter les concepts spécifiques au modèle.
- Le risque qu'un algorithme approprié soit choisi, mais qu'il contienne des erreurs de codage.

La plupart du temps, la modélisation d'un risque se fait par l'intermédiaire de logiciel informatique. Beaucoup d'actuaires et de gestionnaires de risque implémentent les modèles dans leur département et ne jugent pas nécessaire d'avoir recours à un support informatique (IT) pour le faire.

Parfois, une revue approfondie du code ne peut être effectuée car elle nécessite tout simplement trop de temps. Des erreurs d'implémentation peuvent alors subsister et provoquer des résultats incohérents. De plus, la complexité des techniques de codage employées ne permettent parfois pas de tracer rapidement la cause du problème.

Le risque de traitement des données

Une mauvaise compréhension et utilisation des données mises à la disposition des actuaires peuvent conduire à divers biais que ce soit dans le choix des modèles ou dans l'estimation de leur paramètre. Il est donc souvent nécessaire d'effectuer divers choix ou retraitements sur les données :

- Choix de l'historique de données : ce choix doit se faire de manière précise et adaptée. Souvent, certaines périodes historiques ne sont plus représentatives de notre futur.
- Retraitement des données : suppression d'évènements exceptionnels si nécessaire, correction d'erreur de saisie, lissage, … .

Le risque d'estimation

Le risque d'estimation intervient lors du calibrage d'un modèle, méthode qui consiste à ajuster les caractéristiques du modèle à des données disponibles et/ou à certaines contraintes imposées à priori. L'estimation des paramètres du modèle dépend alors de ces données initiales et des méthodes statistiques utilisées. D'une part, les résultats obtenus par ces méthodes se voient affectés d'une erreur d'échantillonnage qui induit un écart systématique par rapport à la "vraie" valeur des paramètres. D'autre part, ces méthodes de calibrage donnent parfois des valeurs très différentes pour les paramètres du modèle et il est difficile alors de définir laquelle sera la plus appropriée.

Le risque d'application

Le risque d'application peut être issu de la complexité des modèles. La plupart de ces modèles sont basés sur des travaux de recherches, et des connaissances techniques et théoriques poussées sont parfois requises pour les comprendre.
Ainsi cette complexité, notamment au niveau des hypothèses du modèle, oblige les actuaires à définir et appliquer des approximations permettant l'utilisation des modèles à partir des données existantes.

Les risques d'implémentation, de traitement des données, d'estimation et d'application ne présentent pas de méthodes concrètes de quantification, et interviennent en général après le choix des modèles. Le choix s'est donc porté sur le risque de spécification qui est en général la principale cause de risque de modèle et qui présente dans la littérature quelques méthodes de quantification.

1.3. Méthodes de quantification du risque de modèles

1.3.1. Contexte

La littérature actuelle propose quelques méthodes théoriques de quantification du risque de modèle. Chacune de ces méthodes propose une approche différente pour ce risque, mais le fondement reste le même : disposer d'une mesure de risque ρ et d'une classe de modèles qui sont des candidats potentiels pour l'évaluation du risque considéré.

Nicole Branger et Christian Schlag propose une approche[3] bayésienne du risque de modèle en tenant compte de l'ensemble des modèles et l'ensemble des informations à priori sur les paramètres de chacun de ces modèles, le tout pondéré par des probabilités conditionnelles ou non conditionnelles.
Philipp Sibbertsen, Gerhard Stahl et Corinna Ledtke propose une approche [4] de quantification, dite « approche du pire des cas », basée sur le modèle possédant la valeur de mesure de risque la plus élevée. Ils étudient la différence entre ce modèle et les autres modèles de la classe.
Enfin, Pauline Barrieu et Giacomo Scandolo propose une approche [5] dite de « modèle de référence », qui reprend l'idée générale de la seconde approche. Cette approche propose de quantifier le risque de modèle par le biais deux mesures de risque de modèle basée sur le modèle de référence et les autres modèles étudiés.

L'approche retenue en particulier dans cet article est celle dite de « modèle de référence » pour quantifier le risque de modèle car elle propose un développement plus intéressant que l'approche dite « approche du pire des cas », et la difficulté de l'utilisation de l'approche bayésienne réside dans la détermination des probabilités conditionnelles et non conditionnelles relatives à chaque modèle de la classe.

1.3.2. Mesure de risque

Une mesure de risque ρ est une fonction définie sur l'espace des variables aléatoires et qui prend ses valeurs sur $\mathbb{R}$.

Plusieurs propriétés[6] sont associées à cette mesure de risque telle que l'invariance en loi, la monotonie, l'invariance par translation, la convexité, l'homogénéité ou encore la sous-additivité. Ces propriétés permettent de réaliser une classification des différentes mesures de risque.
Dans cette étude, nous nous focaliserons sur deux mesures de risque en particulier : la Value at Risk et la Tail Value at Risk.

---

[3] Nicole Branger, Christian Schlag. *Model Risk : A Conceptual Framework for Risk Measurement and Hedging*. 2004.

[4] Philipp Sibbertsen, Gehrard Stahl, Corianna Luedtke. *Measuring model risk.* 2008.

[5] Pauline Barrieu, Giacomo Scandolo. *Assessing Financial Model Risk.* 2013.

[6] Philippe Artzner et al. *Coherent measures of risk.* 1998.

La Value at Risk (VaR) est une mesure de risque correspondante à un quantile, le plus souvent élevé, associé à la distribution de perte du risque. Pour un certain niveau de probabilité p, elle s'écrit :

$$VaR_p(Y) = inf\{a \in \mathbb{R} \mid \mathrm{P}(Y \leq a) \geq p\} = F^{-1}(p)$$

Un des intérêts de cette mesure est qu'elle donne une idée de la queue de distribution, qui peut ne pas être négligeable lorsque l'on s'extrait du cadre gaussien.
En revanche, cette mesure de risque n'est pas qualifiée de cohérente car elle ne satisfait pas la propriété de sous-additivité.

La Tail Value at Risk (TVaR) est une mesure de risque associée à la Value at Risk. Elle permet de quantifier la perte lorsque la VaR est dépassée et plus exactement correspond à la moyenne des VaR de niveau supérieur à p.

Elle s'écrit : $TVaR_p(Y) = \mathrm{E}[Y \mid Y > F^{-1}(p)] = \frac{1}{1-p}\int_p^1 VaR_u(Y)\, du$ (si distribution continue)

Contrairement à la VaR, la TVaR est une mesure cohérente de risque car elle vérifie en permanence la propriété de sous-additivité.

1.3.3. Quantification du risque de modèle : approche dite de « modèle de référence »

Soit : une mesure de risque ρ, un risque X, X_0 le risque associé au modèle de référence.

Le choix du modèle de référence doit être fait statistiquement. En effet, parmi l'ensemble des modèles choisi dans notre classe notée $\mathcal{L}$, un modèle peut se révéler être le plus adéquat par la vérification de ses hypothèses et le calibrage de ses paramètres. Ce modèle sera donc sélectionné comme le modèle de référence.

L'article de Pauline Barrieu et Giacomo Scandolo propose de quantifier le risque de modèle en proposant deux mesures de ce risque : la mesure absolue du risque de modèle notée AM, et la mesure relative du risque de modèle notée RM. L'approche propose d'obtenir une valeur globale pour ces deux mesures en fonction du modèle de référence.

La mesure absolue du risque de modèle est définie par:

$$AM = \sup_i\{AM_i\} = \sup_i\left\{\frac{\rho(X_i)}{\rho(X_0)} - 1\right\} = \frac{\bar{\rho}(\mathcal{L})}{\rho(X_0)} - 1$$

La mesure relative du risque de modèle est définie par :

$$RM = \sup_i\{RM_i\} = \sup_i\left\{\frac{\rho(X_i) - \rho(X_0)}{\bar{\rho}(\mathcal{L}) - \underline{\rho}(\mathcal{L})}\right\} = \frac{\bar{\rho}(\mathcal{L}) - \rho(X_0)}{\bar{\rho}(\mathcal{L}) - \underline{\rho}(\mathcal{L})}$$

Avec : $\underline{\rho}(\mathcal{L}) = inf\{\, \rho(X_i) \mid X_i \in \mathcal{L}\,\}, i = 0, \dots, card(\,\mathcal{L}) - 1$
$\bar{\rho}(\mathcal{L}) = sup\{\, \rho(X_i) \mid X_i \in \mathcal{L}\,\}, i = 0, \dots, card(\,\mathcal{L}) - 1$
$\rho(X_0)$ = mesure de risque du modèle de référence

Pour l'application de cette approche, il faut toutefois prendre en compte certaines limites.
La première limite est de choisir une classe de modèle trop restreinte et donc de risquer de ne pas contenir dans la classe étudiée un modèle satisfaisant que l'on considère comme le modèle de référence.
La seconde limite est de choisir une classe trop vaste contenant des modèles inadaptés et qui peut conduire à une surestimation significative du risque et par conséquent du risque de modèle.

Le modèle de référence peut être choisi à partir des résultats statistiques obtenus suite à la vérification des hypothèses des modèles et l'estimation de leurs paramètres. Cependant, les données disponibles ne permettent parfois pas d'identifier un modèle adéquat en particulier et le choix du modèle de référence est alors laissé à l'appréciation des experts.
L'étude du risque de modèle ne sera réalisée que sur deux types de risques majeurs : le risque action et le risque de provisionnement non-vie, avec pour mesure de risque la VaR et la TVaR. Pour mener à bien cette étude, nous avons adopté une approche qui consiste à vérifier la qualité des données, la validité des modèles choisis et la cohérence des résultats obtenus.

Cet article ne présentera que les résultats de la valeur absolue du risque de modèle car elle est plus pertinente et simple à interpréter.

2 Applications

2.1. Etude sur un modèle d'actif financier

2.1.1. Contexte

La modélisation d'un actif boursier soulève plusieurs problématiques que ce soit en termes de qualité des données utilisées, de périodes historiques prises en compte pour couvrir autant que possible les périodes de crises financières, de calibrage des modèles stochastiques envisagés pour la projection, ou de la validation des hypothèses des différents modèles. L'ensemble de ces éléments peuvent avoir un impact non seulement sur le choix du modèle mais être un facteur déterminant dans le mauvais choix de celui-ci et donc être à l'origine du risque de modèle.

Nous allons dans cet article appliquer l'approche de quantification de risque de modèle retenue sur un modèle d'actif financier pour les actions américaines. Les projections d'un actif financier se font par le bais de différents modèles stochastiques. Ces projections doivent être les meilleures possibles, notamment afin que les modèles puissent anticiper l'apparition de scénarios extrêmes pouvant avoir une influence significative sur des valeurs clés tel que la VaR 99,5% et la TVaR 99 %.

2.1.2. Données

L'indice retenu pour effectuer cette étude est l'indice boursier américain GDDLUS, indice qui représente le prix moyen brut (sans taxes) du marché des actions aux Etats-Unis. L'utilisation de cet indice est appropriée pour les actions américaines que l'on souhaite modéliser car, comme tout indice, il est représentatif de la performance de ce marché dans son ensemble. Un historique journalier a été privilégié dans cette étude pour permettre de conclure à une significativité suffisante des modèles utilisés.

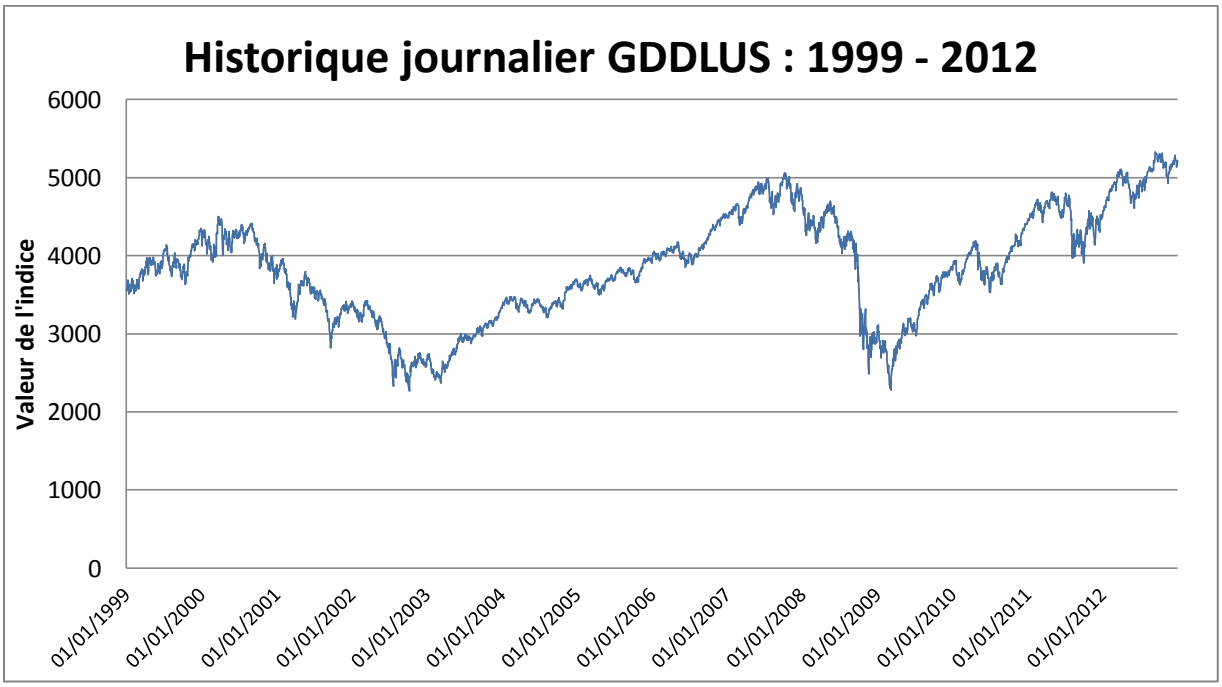

Figure 2 : Cours historique journalier de l'indice

Avant d'effectuer un choix quelconque de modèles stochastiques, il est bien évidemment nécessaire d'analyser au préalable les données à notre disposition. Pour ce faire, nous avons étudié le rendement de l'indice à l'aide de quelques statistiques descriptives. L'intérêt d'une telle étude préliminaire est de restreindre la gamme des modèles considérés.

Statistiques de base du rendement logarithmique			
Minimum	-9,50E-02	**Maximum**	1,10E-01
Date du minimum	14/10/2008	**Date du maximum**	10/10/2008
Moyenne	1,05E-04	**Nombre total de données**	3523
Variance	1,79E-04	**Ecart-type σ**	1,34E-2

$r_t = ln(S_t) - ln(S_{t-1})$ avec S_t le prix de l'actif à l'instant t	Probabilité de hausse $\mathrm{P}(r_t > x)$	Probabilité de baisse $\mathrm{P}(r_t < -x)$
$x = 0$	52,94 %	47,06 %
$x = 1 \times$ Ecart-type	10,50 %	11,72 %
$x = 2 \times$ Ecart-type	2,44 %	2,58 %
$x = 3 \times$ Ecart-type	0,71 %	0,85 %
$x = 4 \times$ Ecart-type	0,26 %	0,31 %

Tableau 1 : Résultats des statistiques descriptives sur le rendement journalier de l'indice

L'analyse statistique des données nous montre qu'une masse de probabilité importante se situe à proximité d'un rendement faible de l'ordre de plus ou moins un pourcent :

$$\mathrm{P}(r_t \in [-\sigma; +\sigma]) \cong 80\ \%$$

Ce phénomène apparaît la plupart du temps sur les marchés financiers car durant les périodes stables, la valeur de l'actif évolue très peu. De plus, les probabilités de hausses et de baisses semblent relativement symétriques.

Cependant, l'actif peut connaître également des périodes de variations brusques pouvant provoquer ainsi des sauts de valeur, et l'apparition de ces scénarios peut alourdir la queue de distribution du rendement de l'actif par rapport à une distribution gaussienne. Parmi ces périodes, nous pouvons par exemple observer sur la courbe historique des perturbations pour les années début 2007 - fin 2009 avec la crise des subprimes.

Tous les éléments issus de ces statistiques sont bien à prendre en compte dans nos choix de modèles et doivent nous permettre de nous focaliser sur certains modèles stochastiques en particulier.

2.1.3. Modèles et validation

La littérature actuelle propose plusieurs modèles stochastiques pour projeter le cours d'un actif financier. On trouve en général le modèle de Black & Scholes[7], qui sous certaines hypothèses restrictives reste le modèle le plus utilisé en pratique.

$$S(t) = S_0 \times exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right]$$

avec $S(t)$ le prix de l'actif à la date t, S_0 le prix initial de l'actif, les paramètres constants μ et σ correspondants respectivement à la tendance et la volatilité, et $W(t)$ un mouvement brownien standard de loi Normale $\mathcal{N}(0, t)$.

On trouve également des modèles à sauts, comme le modèle de Merton[8] qui sont adaptés à des cours d'actif présentant des discontinuités de prix.

$$S(t) = S_0 \times exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t) + \sum_{k=1}^{N(t)} U(k)\right]$$

avec $S(t)$ le prix à l'instant t de l'actif et S_0 son prix initial, N le processus de Poisson d'intensité λ qui modélise le nombre de saut, U la suite de variables aléatoires i.i.d de loi normale $\mathcal{N}(0, \Omega^2)$ qui modélise les amplitudes des sauts, et W le mouvement brownien standard de loi normale $\mathcal{N}(0, \mathrm{t})$.

Enfin, on trouve aussi des modèles à volatilité stochastique comme des séries temporelles avec par exemple le processus Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (GARCH)[9], qui permettent d'éliminer l'hypothèse de constance de la volatilité utilisée dans le modèle de Black & Scholes.

$$\begin{cases} r_t = ln\left(\dfrac{S(t)}{S(t-1)}\right) = \sigma_t\, \eta_t \\ \sigma_t^2 = \omega + \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i\, r_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j\, \sigma_{t-j}^2 \end{cases}$$

avec ω est le coefficient de volatilité à long terme issu de l'équation de variance suivante : $\omega = \sigma^2(1 - \alpha - \beta)$, η_t est une suite de variables aléatoires i.i.d tel que $\mathrm{E}(\eta_t) = 0$ et $\mathrm{E}(\eta_t^2) = 1$, $\alpha_i > 0$ sont les coefficients d'auto-régression, et $\beta_j > 0$ sont les coefficients de variance.
Dans notre cas, nous avons démontré qu'un GARCH(1,1) est suffisant.

---

[7] Khalid Khaled, Meddahi Samia. *Estimation of the Parameters of the Stochastic Differential Equations Black-Scholes Model Share Price of Gold.* 2010.

[8] Robert C. Merton. *Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous.* 1975.

[9] Tim Bollerslev. *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasicity*. 1986.

Le choix restrictif de ces modèles s'est fait suivant les observations faites sur l'étude statistique des données dans le paragraphe précédent.
Nous avons, pour chacun de ces modèles, testé leurs hypothèses relatives (test normalité, contrainte de positivé de certains coefficients, contrainte de stabilité,…) et la significativité des paramètres estimés lorsque cela était possible.
Pour le choix du modèle de référence nous nous sommes également appuyés sur un test statistique permettant de backtester les modèles sur l'historique de données disponible, le nom de ce test est le Probability Integral Transform[10].

2.1.4. Résultats

Nous avons montré à travers la vérification des hypothèses des modèles et le test statistique du Probability Integral Transform que le modèle GARCH était le modèle le plus adéquat pour nos données et nous l'avons donc choisi comme le modèle de référence de cette première étude. Nous allons maintenant le comparer aux deux autres modèles pour la projection de l'actif pour l'année 2013.

Nous avons pris en compte l'historique de données de 1999 à 2012 pour estimer les paramètres des trois modèles pour l'année 2013. Nous avons ensuite pour chaque modèle réalisé 20 000 projections de l'actif. Pour chaque projection, nous sommes partis de la valeur initiale de l'actif (dernière date connue en 2012) et avons simulé les rendements futurs pour aboutir à la valeur finale (dernière date de l'année 2013).
Nous avons ensuite déterminé la VaR 99,5 % et la TVaR 99 % estimé par chaque modèle et quantifié le risque de modèle en utilisant la méthode dite de « modèle de référence ». En vue des faibles variations du cours de l'actif cette année, nous pouvons nous attendre à des résultats faibles de risque de modèle.

Les tableaux ci-dessous donnent donc les résultats obtenus pour la valeur absolue du risque de modèle pour les deux mesures de risque, VaR 99,5 % et TVaR 99 %.

	VaR 99,5 %		
Modèle	**GARCH**	**Black & Scholes**	**Merton à saut**
i	0	1	2
AM_i	0	0,0312	0,0296

AM	0,0312

Tableau 2 : Résultats de la mesure absolue du risque de modèle pour la VaR 99,5 %

[10] Cf Annexe 1

	TVaR 99 %		
Modèle	**GARCH**	**Black & Scholes**	**Merton à saut**
i	0	1	2
AM_i	0	-0,1000	-0,0086

AM	0

Tableau 3 : Résultats de la mesure absolue du risque de modèle pour TVaR 99 %

Nous pouvons constater que la valeur absolue du risque de modèle est proche de zéro pour la VaR 99,5 % et égale à zéro pour la TVaR 99 %. La prise en compte de risque de modèle, en complément de la VaR 99,5 % et la TVaR 99 % du modèle de référence, ne s'avère donc pas nécessaire pour cette année. Ceci s'explique aussi par la période relativement calme observée cette année.

Il sera donc intéressant pour le futur d'observer l'évolution des résultats de la valeur absolue du risque de modèle sur des périodes plus volatiles, si celle-ci se produisent dans les années à venir.

2.1.5. Conclusion de la première étude

Cette première étude a présenté une première approche de quantification du risque de modèle sur un modèle d'actif en utilisant la méthode dite de « modèle de référence ». Les résultats obtenus ont montré que le risque de modèle associé à la mesure absolue du risque de modèle pour l'année 2013, VaR 99,5 % et TVaR 99%, était proche de zéro. Cependant ces premiers résultats ne permettent absolument pas de considérer que le risque de modèle n'existe pas pour un modèle d'actif. En effet, cela dépend significativement des variations du cours de l'actif qui peuvent être calmes à certaines périodes et fortes à d'autres périodes. Il sera donc intéressant de mettre à jour ce type de quantification afin d'observer la présence ou non de risque de modèle pour le futur.

Une piste intéressante serait d'étudier des actifs disposant d'un historique journalier beaucoup plus conséquent, prenant en compte plusieurs périodes de crises. Des calculs pourraient alors être effectués avant et après ces crises économiques afin de voir l'évolution des modèles, et permettre de quantifier le risque potentiel de modèle.

2.2. Etude sur un modèle de provisionnement non-vie

Notations

Dans cette section, nous allons utiliser les notations suivantes :

- Les années de souscription sont notées $i = 1, \dots, I$ et les années de développement sont notées $j = 1, \dots, J$.
- Soit n le nombre total d'année de notre triangle de paiements, on se place dans le cadre où $I = J = n$.
- $C_{i,j}$ et $Z_{i,j}$, $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$ correspondent respectivement aux paiements cumulés et aux paiement incrémentaux du triangle tel que $Z_{i,j} = C_{i,j} - C_{i,j-1}$ et $Z_{i,1} = C_{i,1}$.
- On suppose connu les paiements $\left(C_{i,j}\right)_{i+j \leq n+1}$.
- On note R_i la provision pour l'année de souscription i et $R = \sum_{i=1}^{n} R_i$ le montant de la provision total qui correspond à la charge ultime.

2.2.1. Contexte

En provisionnement non-vie, le montant des sinistres n'est pas connu à l'avance par l'assureur et le réassureur. Le paiement de ces sinistres peut intervenir plusieurs années après selon le type de contrat, la branche, le type de comptabilisation, ou encore le développement court ou long des branches étudiées. Il est essentiel pour toute compagnie d'assurance et de réassurance d'anticiper ces paiements futurs.

Nous allons dans cette section 2.2. appliquer l'approche de quantification du risque de modèle retenue dans la sous-section 1.3.3. sur un modèle de provisionnement non-vie. L'estimation de la charge ultime à provisionner se fait par le biais de différentes méthodes de provisionnement déterministes ou stochastiques reposant sur des hypothèses qui parfois ne sont pas vérifiées dans la réalité, et sont à l'origine d'une apparition potentielle de risque de modèle .
Dans le contexte de Solvabilité II, la nécessité de déterminer la VaR 99,5 % encourage les compagnies, lorsque cela est possible, à obtenir une distribution de cette charge ultime. La détermination de la distribution de cette charge peut se faire par le biais de différentes méthodes dont la méthode « bootstrap » qui permet d'obtenir cette distribution à partir d'un ré-échantillonnage avec remise.

2.2.2. Données

Parmi les différents segments actuariels du groupe SCOR, nous avons choisi un segment en particulier[11] pour effectuer notre étude. Nous avons choisi d'appliquer nos modèles sur le triangle des sinistres payés qui présente l'avantage de n'avoir aucun paiement négatif[12] et d'avoir un nombre de retraitement relativement faible à effectuer. Le nombre d'année de souscription et d'année de développement de ce triangle est le même, et égal à quinze années.
Le segment étudié est à développement moyen car les paiements cumulés du triangle se stabilisent plus ou moins à partir de la huitième année de développement

[11] Pour des raisons de confidentialités le nom du segment n'est pas spécifié

[12] La présence d'incréments négatifs peut être due par exemple suite à des recours.

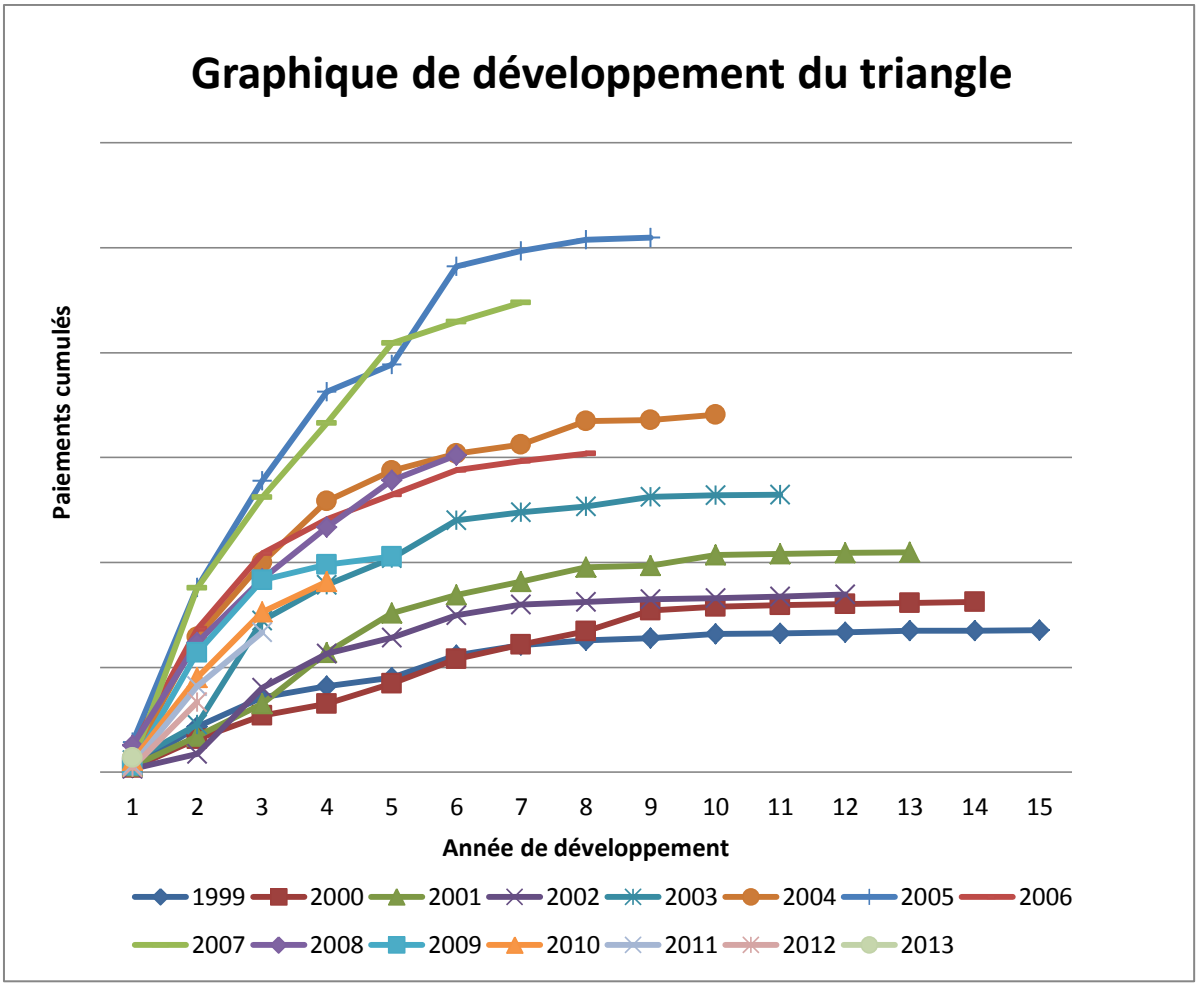

Figure 3 : Paiements cumulés par année de souscription en fonction des années de développement

2.2.3. Modèles et validation

Pour estimer précisément la charge ultime, plusieurs méthodes ou modèles de provisionnement peuvent être utilisés comme le présentent England et Verall dans leur article[13]. Parmi ces modèles, certains sont basés sur les paiements cumulés (méthode de Chain-Ladder, modèle de Mack) et d'autres sur les paiements incrémentaux (modèles GLM : Poisson, Poisson surdispersé, Gamma, Normale).

La méthode de Chain-Ladder est l'une des premières méthodes de provisionnement qui a été proposée au début des années 1930. Cette méthode déterministe est relativement simple et basée sur les paiements cumulés $C_{i,j}$. Elle suppose que le développement des sinistres d'une année de développement se fait proportionnellement à l'année précédente et cette proportion est constante pour toutes les années de souscription.

$$\forall\, i = 1,..,n \qquad C_{i,j+1} = f_j\, C_{i,j} \quad , \quad \hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}} \qquad j = 1,\dots,n-1$$

[13] P. D. England, R. J. Verrall. *Stochastic claims reserving in general insurance.* 2002.

La méthode de Mack proposé par Thomas Mack dans son article[14] est une méthode stochastique, basée sur la méthode de Chain-Ladder, pour estimer la volatilité des réserves individuelles et de la charge ultime.

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_j^2 = \dfrac{1}{n-j-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}\left(f_{ij} - \hat{f}_j\right)^2 \ \text{où} \ f_{ij} = \dfrac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} \\ \hat{\sigma}_{n-1}^2 = min\left(\dfrac{\hat{\sigma}_{n-2}^4}{\hat{\sigma}_{n-3}^2}, min(\hat{\sigma}_{n-2}^2, \hat{\sigma}_{n-3}^2)\right) \end{cases}$$

Enfin, Les modèles linéaires généralisés (GLM) ont été introduit par Nelder et Wedderburn[15] en 1972. Ces modèles sont une généralisation des modèles linéaires normaux et se décomposent en trois composantes principales : une composante aléatoire, une composante systématique et une fonction de lien g.

$$\mu_{i,j} = \mathrm{E}(Y_{i,j}) = g^{-1}(\eta_{i,j}).$$

- forme additive : $\mu_{i,j} = \mu + \alpha_i + \beta_j$.
- forme multiplicative : $\mu_{i,j} = \mu\ \alpha_i\ \beta_j$, ou de manière plus courante $\mu_{i,j} = e^{\mu\ \alpha_i\ \beta_j}$.

où μ représente la moyenne générale (ou intercept), et les paramètres $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ correspondent respectivement aux effets « lignes » et aux effets « colonnes » du modèle

Pour chacun de ces modèles, nous avons testé leurs hypothèses relatives (test d'absence d'effet calendaire, test de linéarité, test d'indépendance, normalité des résidus,…) et la significativité des paramètres lorsque cela était possible. Sur l'ensemble des modèles de provisionnement, la méthode de Chain-Ladder a donné de meilleurs résultats.

2.2.4. Résultats

Nous avons montré à travers la vérification des hypothèses des modèles que la méthode de Chain-Ladder était le modèle le plus adéquat pour nos données et nous l'avons donc choisi comme le modèle de référence de cette seconde étude. Nous avons appliqué la méthode bootstrap[16] propre à chacun de ces modèles pour obtenir une distribution de la charge ultime pour chaque modèle. Pour ce faire, nous avons réalisé 10 000 itérations de la méthode afin d'obtenir 10 000 réalisations de la charge ultime. Nous avons ensuite calculé respectivement la VaR 99,5 % et la TVaR 99 % à partir de la distribution de la charge ultime pour chacun des modèles, et ainsi pu quantifier le risque de modèle associé à la VaR 99,5 % et la TVaR 99 % à partir de notre modèle de référence.
Nous avons à partir de nos 10 000 réalisations de la charge ultime pu représenter la fonction de densité de cette charge et calculé le CoV des différentes distributions.

[14] Thomas Mack. *Measuring the Variability of Chain Ladder Reserve Estimates*. 1993.

[15] J. A. Nelder, R. W. M. Wedderburn. *Generalized Linear Models*. 1972.

[16] Cf Annexe 2

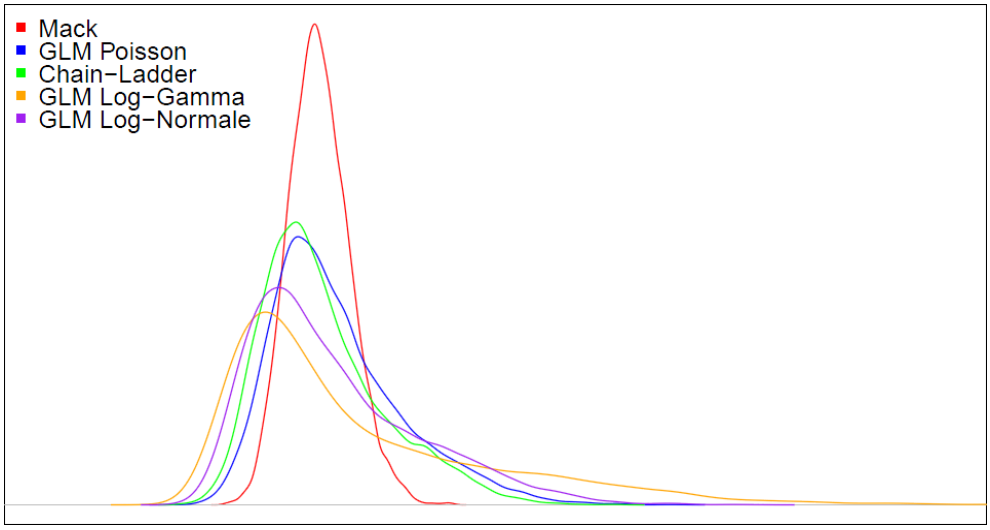

Figure 4 : Représentation graphique de la fonction de densité de la charge ultime pour chaque modèle

Modèle	Chain-Ladder	Mack	GLM Poisson	GLM Log-Gamma	GLM Log-Normale
CoV	21,79 %	10,89 %	22,11 %	42,18 %	28,86 %

Tableau 4 : CoV de la distribution de charge ultime pour chaque modèle

La moyenne obtenue pour chacune des distributions est relativement proche comme nous pouvons également le constater à partir des fonctions de densités. La distribution de la charge pour le modèle de Mack possède une queue de distribution plus faible que les autres méthodes. Au contraire, elle est plus forte pour le modèle log-Gamma. Pour les trois autres modèles c'est-à-dire la méthode de Chain-Ladder et les modèles GLM Poisson et Log-Normale, la densité de la distribution est relativement proche pour ces trois modèles.

Nous allons maintenant quantifier le risque de modèle sur la VaR 99,5 % et la TVaR 99 % en utilisant l'approche dite de « modèle de référence ». En vue des premières observations faites sur la distribution de la charge ultime de chaque modèle, nous pouvons nous attendre à des résultats plus différents que la précédente étude menée à la section 2.1. sur un modèle d'actif.

Le tableau suivant donne les résultats obtenus pour la valeur absolue du risque de modèle pour les deux mesures de risque, VaR 99,5 % et TVaR 99 %.

	VaR 99,5 %				
Modèle	Chain-Ladder	Mack	GLM Poisson	GLM Log-Gamma	GLM Log-Normale
i	0	1	2	3	4
AM_i	0	-0,2338	0,0765	0,6909	0,1900

AM	0,6909

Tableau 5 : Résultats de la mesure absolue du risque de modèle pour la VaR 99,5 %

	TVaR 99 %				
Modèle	**Chain-Ladder**	**Mack**	**GLM Poisson**	**GLM Log-Gamma**	**GLM Log-Normale**
i	0	1	2	3	4
AM_i	0	-0,2351	0,0786	0,7015	0,1918

AM	0,7015

Tableau 6 : Résultats de la mesure absolue du risque de modèle pour la TVaR 99 %

Nous pouvons constater que la valeur de AM est assez élevée pour la VaR 99,5 % et la TVaR 99 %.

Dans la cadre de solvabilité II, la valeur (1+AM) correspondrait à la proportion par laquelle il faudrait multiplier le capital du modèle de référence pour bien prendre en compte le risque de modèle sur le segment étudié. Dans ce cas, le montant obtenu serait relativement conséquent.

Cette étude nous montre parfaitement la limite de la méthode de calcul pour la quantification du risque de modèle par l'approche dite de « modèle de référence » surtout lorsque l'on utilise des modèles dont les hypothèses ne sont pas totalement vérifiées, ce qui arrive parfois dans la réalité en l'absence de données suffisantes.

2.2.5. Conclusion de la seconde étude

Cette seconde étude a présenté une seconde approche de quantification du risque de modèle sur un modèle de provisionnement non-vie en utilisant également la méthode dite de « modèle de référence ».

Contrairement à la première étude, la vérification des hypothèses des modèles de provisionnement s'est avérée un peu plus problématique notamment du fait de la quantité relativement restreinte de données que nous avions à notre disposition. Il s'agit d'un problème auquel doit faire face un actuaire. Il doit ainsi s'adapter à cette contrainte et essayer malgré tout de proposer une distribution de la charge ultime pour anticiper les paiements futurs auxquels devra faire face la compagnie.

Les résultats obtenus dans cette étude ont montré que le risque de modèle associé aux deux mesures de risque, VaR 99,5 % et TVaR 99%, était assez conséquent. Cela nous a permis de mettre en évidence la limite de l'approche de quantification du risque modèle par la méthode dite de « modèle de référence », et de nous convaincre qu'une quantification plus précise du risque de modèle doit être réalisée pour ne pas dépendre seulement d'une seule valeur pour le calcul de AM.
En effet, notre classe de modèle peut inclure des modèles non adaptés pour l'évaluation du risque étudié et comme la valeur de AM dépend d'une borne supérieure, il existe un risque de surestimation du risque de modèle à cause d'un potentiel mauvais choix de modèle.
Toutefois une bonne connaissance du risque à modéliser ainsi que du portefeuille de contrat et des risques sous-jacents, permettraient de faire une sélection préalable plus précise des modèles et ainsi avoir une meilleure estimation du potentiel risque de modèle.

3 Amélioration de l'approche de quantification

Dans cette section, nous allons proposer une amélioration de la méthode dite de « modèle de référence » utilisée pour quantifier le risque de modèle. Pour ce type d'approche, il est impératif que la classe de modèle sélectionnée soit représentative du risque que l'on souhaite modéliser.

Une alternative intéressante serait de prendre en compte l'ensemble des valeurs individualisées pour quantifier le risque de modèle et non la borne supérieure de ces valeurs. Le risque de modèle pourrait alors être calculé à partir de ces valeurs individualisées et de facteur de crédibilité associé à ces différentes valeurs.

L'enjeu principal concerne toutefois la détermination de ces facteurs de crédibilité. La valeur à affecter à ces facteurs devra dépendre de deux critères essentiels : l'avis d'un expert et les résultats statistiques des modèles. Les facteurs de crédibilité seront donc alors pondérés pas ces deux avis.
L'avis d'un expert est essentiel car il permet de juger d'une part quelle classe de modèle est la plus adaptée par rapport aux différentes typologies de risques étudiés et des informations disponibles, et d'autre part quels sont les degrés de comparabilité de ces modèles.
L'avis statistique, quant à lui, résulte des différents tests réalisés par les actuaires que ce soit en terme de vérification des hypothèses des modèles, avec un poids plus conséquent affecté aux hypothèses importantes, et de calibrage de leurs paramètres, avec la nécessité de prendre en compte les tests de significativité des paramètres s'ils sont disponibles.

En prenant compte ces facteurs de crédibilité, la valeur obtenue pour la mesure absolue et relative du risque de modèle serait alors :

$$AM_{ajusté} = \sum_{i=0}^{card(\mathcal{L})-1} \omega_i \, AM_i = \sum_{i=0}^{card(\mathcal{L})-1} \frac{\omega_i \, \rho(X_i)}{\rho(X_0)} - 1$$

$$RM_{ajusté} = \sum_{i=0}^{card(\mathcal{L})-1} \omega_i \, RM_i = \sum_{i=0}^{card(\mathcal{L})-1} \frac{\omega_i \, \rho(X_i) - \rho(X_0)}{\bar{\rho}(\mathcal{L}) - \underline{\rho}(\mathcal{L})}$$

avec :

- $\mathcal{L}$ la classe de modèle contenant l'ensemble des modèles choisis
- ω_i le facteur de crédibilité associé au modèle i
- $\sum_{i=0}^{card(\mathcal{L})-1} \omega_i = 1$
- $\underline{\rho}(\mathcal{L}) = inf\{\, \rho(X_i) |\, X_i \in \mathcal{L} \,\}, \, i = 0, \dots, card(\mathcal{L}) - 1$
- $\bar{\rho}(\mathcal{L}) = sup\{\, \rho(X_i) |\, X_i \in \mathcal{L} \,\}, \, i = 0, \dots, card(\mathcal{L}) - 1$
- $\rho(X_0)$ = mesure de risque du modèle de référence

Une telle approche présenterait la possibilité de mieux prendre en compte le risque de modèle car on peut remarquer très facilement que $AM_{ajusté} \leq AM$ et $RM_{ajusté} \leq RM$.
Cependant, le problème majeur concerne essentiellement la détermination des facteurs de crédibilité qui peut se révéler être une tâche fastidieuse et devra faire l'objet d'une étude complète. Il faudra toutefois veiller à ce que l'apport d'un avis d'expert ne soit pas à son tour une potentielle source significative de risque de modèle.

Conclusion

L'objet de cet article a été de proposer une première approche pour la quantification du risque de modèle dans le contexte actuel de Solvabilité II. Ce sujet est encore très peu abordé dans le monde actuariel mais l'apparition d'un tel risque peut avoir des influences non négligeables sur le capital des compagnies d'assurance et de réassurance.

Les recherches effectuées sur le risque de modèle, nous ont montré qu'il n'existe pas de définition précise de ce risque et que de multiples sources peuvent être à l'origine de l'apparition du risque de modèle. Nous avons décidé de nous focaliser en particulier sur le risque de spécification, considéré comme sa source principale, et de proposer une méthode de quantification pertinente. Cette méthode était l'approche dite de « modèle de référence », dont l'évaluation du risque de modèle est basée sur deux mesures de risque : la valeur absolue et relative du risque de modèle.

Nous avons d'abord appliqué cette approche sur un modèle d'évaluation d'un actif financier. La quantité importante de données à notre disposition nous a permis de vérifier précisément les hypothèses des modèles stochastiques sélectionnés et de calibrer leurs paramètres. Parmi les modèles utilisés, le choix du modèle de référence a été appuyé par des vérifications et par l'application d'un test statistique nommé le *Probability Integral Transform*, test qui permettait de backtester nos modèles sur l'historique de données disponible.
Parmi ces modèles, le modèle GARCH s'est avéré adapté en particulier pour nos données. Après application, la quantification du risque de modèle sur la VaR 99,5 % et la TVaR 99 % pour la projection de l'actif pour l'année 2013 n'a pas permis de mettre en évidence l'apparition d'un tel risque sur nos données, notamment à cause de la tendance relativement calme du marché cette année. Cependant, des études futures durant des périodes de marchés beaucoup plus volatiles devront être réalisées pour observer l'évolution de ce risque.

Nous avons ensuite appliqué notre approche cette fois-ci sur un modèle de provisionnement non-vie où la quantité de données mise à notre disposition était moins conséquente. La vérification des hypothèses des modèles s'est avérée par conséquent plus difficile. Le risque de modèle s'est trouvé nettement plus visible sur la VaR 99,5 % et la TVaR 99 % de la distribution de la charge ultime. Cependant, cette quantification dépend énormément de la classe de modèles retenue et parmi ces modèles certains peuvent donner des valeurs pouvant entraîner une surestimation du risque de modèle. Nous avons alors décidé de proposer des améliorations de notre approche de quantification dont l'alternative future serait de prendre en compte des facteurs de crédibilités dépendant d'avis d'experts et d'avis statistiques.

Le risque de modèle reste un risque que les professionnels aussi bien du monde assurantiel que financier doivent continuer à étudier et à approfondir dans les années à venir. L'application de la réforme Solvabilité II en janvier 2016 pourrait conforter la nécessité de quantifier ce risque de manière précise. Les données à la disposition des actuaires ne permettent souvent pas de vérifier complètement les hypothèses des modèles, et le choix d'un modèle pour le portefeuille étudié pourrait s'appuyer alors également sur des avis fournis par les experts. C'est cette raison qui nous a poussée à proposer des améliorations pour notre approche de quantification dite de « modèle de référence » à travers des facteurs de crédibilité. Cependant, la détermination de tels facteurs devra se faire en fonction de plusieurs critères aussi bien qualitatifs que quantitatifs, et cette pondération permettrait de quantifier le risque de modèle d'une manière adéquate en fonction du capital du modèle de référence.

Annexes

Annexe 1 : Test du Probability Integral Transform

La littérature propose plusieurs tests statistiques permettant de faire un backtesting des modèles en utilisant l'historique de donnés. Parmi ces tests, on trouve le Probability Integral Transform (ou PIT) qui a été proposé par Diebold en 1998. En résumé, le principe de ce test est le suivant[17] :

A l'instant $t-1$, nous obtenons grâce à l'échantillon de valeurs historiques la fonction de répartition empirique conditionnelle à cet échantillon $\hat{G}_{t-1}(x)$ pour la prévision des valeurs futures. Cette fonction $\hat{G}_{t-1}(x)$ est utilisée dans le test du PIT tel que : $U_i = \hat{G}_{t-1}(x_i)$ où les x_i correspondent aux valeurs futures observées.
Par définition, les probabilités U_i sont comprises entre 0 et 1, et seront utilisées dans ce test.
On construit ainsi les probabilités U_i de manière récurrente en passant ensuite à l'instant t, et ainsi de suite.

Diebold affirme que si les variables U_i sont indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) de loi uniforme $U(0,1)$ alors le modèle anticipe bien la prévision des valeurs futures.
Nous allons donc présenter pour chaque modèle la construction des réalisations uniformes nécessaires à l'élaboration du test de Diebold.

Le modèle de Black & Scholes

Dans ce modèle, le rendement logarithmique journalier de l'actif doit suivre une loi normale de moyenne égale à $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ et de variance égale à σ^2.

- **Etape 1 :** Estimation de $\mu^{(k)}$ et $\sigma^{(k)}$ grâce à l'historique de 1999 à $1999+(k+1)$

- **Etape 2 :** Calcul des rendements logarithmiques $r_i^{(k)}, i = 1, \dots, 251$[18] , de l'année 1999+(k+2)

- **Etape 3 :** Construction de : $x_i^{(k)} = \dfrac{r_i^{(k)} - (\mu^{(k)} - \sigma^{2(k)}/2)}{\sigma^{(k)}}$

- **Etape 4 :** Construction de la variable uniforme $U^{(k)} = \{u_1^{(k)}, \dots, u_{251}^{(k)}\}$ où $u_i^{(k)} = \Phi(x_i^{(k)})$ avec Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

On répète l'ensemble des étapes pour $k \in \{1, \dots, 12\}$.

Le modèle de Merton à saut

- **Etape 1 :** Estimation de $\mu^{(k)}$,$\sigma^{(k)}$, $\lambda^{(k)}$ et $\Omega^{(k)}$ grâce à l'historique de 1999 à $1999+(k+1)$

[17] Pour plus de détail se référer à Francis X. Diebold, Todd A. Gunther, Anthony S. Tay. *Evaluating Density Forecasts*. 1998. et Peter Blum. *On some mathematical aspects of dynamic financial analysis*. 2004.

[18] En général, chaque année possède 252 jours, ce qui nous permet d'obtenir 251 rendements logarithmiques

- **Etape 2 :** Calcul des rendements logarithmiques ${r_i}^{(k)}$ de l'année $1999 + (k+2)$
- **Etape 3 :** Construction de la variable uniforme $U^{(k)} = \{{u_1}^{(k)}, \dots, {u_{251}}^{(k)}\}$ où ${u_i}^{(k)} = \mathrm{F}\left({r_i}^{(k)}\right)$ avec F la fonction de répartition de la loi du rendement logarithmique journalier du modèle de Merton à saut et Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite :

$$F\left({r_i}^{(k)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi\left[\frac{{r_i}^{(k)} - (\mu^{(k)} - {\sigma^{(k)}}^2/2)}{\sqrt{n\,{\Omega^{(k)}}^2 + {\sigma^{(k)}}^2}}\right] e^{-\lambda^{(k)}} \frac{{\lambda^{(k)}}^n}{n!}$$

On répète l'ensemble des étapes pour $k \in \{1, \dots, 12\}$.

<u>Le modèle GARCH</u>

- **Etape 1 :** Estimation de $\omega^{(k)}, \alpha^{(k)}, \beta^{(k)}$ et grâce à l'historique de 1999 à $1999 + (k+1)$

- **Etape 2 :** Calcul des rendements logarithmiques ${r_i}^{(k)}$ de l'année $1999 + (k+2)$ et de la volatilité conditionnelle ${\sigma_i}^{(k)}$ à partir de l'équation de récurrence suivante :

$${\sigma_i}^{(k)} = \sqrt{\omega^{(k)} + \alpha^{(k)}\, {r_{i-1}^2}^{(k)} + \beta^{(k)} {\sigma_{i-1}^2}^{(k)}}$$

  Il faut réaliser un calcul pour obtenir le paramètre initial ${\sigma_1}^{(k)}$ qui dépend de ${\sigma_0^2}^{(k)}$ et de ${r_0^2}^{(k)}$.
  Pour le paramètre ${r_0^2}^{(k)}$, nous avons pris le dernier rendement connu ${r_{251}^2}^{(k-1)}$.
  Pour le paramètre ${\sigma_0^2}^{(k)}$ en développant l'équation de récurrence, nous pouvons exprimer ce paramètre grâce aux rendements ${r_i}^{(k-1)}$:

$${\sigma_0^2}^{(k)} = \omega^{(k)} \frac{1 - {\beta^{(k)}}^{252}}{1 - \beta^{(k)}} + \alpha^{(k)} \sum_{i=1}^{251} {r_{251-i}^2}^{(k-1)}\, {\beta^{(k)}}^{\,i-1} + {\beta^{(k)}}^{252}\, {\sigma_0^2}^{(k-1)}$$

- **Etape 3 :** Construction de : ${x_i}^{(k)} = \frac{{r_i}^{(k)}}{{\sigma_i}^{(k)}}$

- **Etape 4 :** Construction de la variable uniforme $U^{(k)} = \{{u_1}^{(k)}, \dots, {u_{251}}^{(k)}\}$ où ${u_i}^{(k)} = \Phi({x_i}^{(k)})$ avec Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

On répète l'ensemble des étapes pour $k \in \{1, \dots, 12\}$.

Pour chacun des modèles on construit la variable aléatoire $U = \{U^{(1)}, \dots, U^{(12)}\}$ qui regroupe l'ensemble des réalisations uniformes. On teste enfin si la variable aléatoire de chaque modèle est bien uniforme et si les réalisations sont bien indépendantes.

<u>Annexe 2 :</u> Méthode bootstrap

<u>Le méthode Chain-Ladder</u>

Les différentes étapes pour la construction d'une méthode « bootstap » pour la méthode Chain-Ladder sont les suivantes :

- **Etape 1 :** Estimation des provisions individuelles $\hat{R}_i$ par la méthode de Chain-Ladder grâce aux facteurs de développement f_j .

- **Etape 2 :** Calcul de la charge cumulée espérée $\left(\hat{C}_{i,j}\right)_{i+j<n+1}$ en appliquant en arrière les facteurs de développement

$$\hat{C}_{i,j+1} = {C_{i,j+1}}/{\hat{f}_j}$$

  On en déduit alors les paiements incrémentaux réels $Z_{i,j} = C_{i,j} - C_{i,j-1}$ et les paiements incrémentaux espérés $\hat{Z}_{i,j} = \hat{C}_{i,j} - \hat{C}_{i,j-1}$.

- **Etape 3 :** Calcul des résidus de Pearson :

$$r_{i,j}^p = \frac{Z_{i,j} - \hat{Z}_{i,j}}{\sqrt{\hat{Z}_{i,j}}}$$

  On en déduit alors le paramètre de dispersion ϕ à partir des résidus de Pearson.

$$\phi = \frac{\sum^{n}{}_{\substack{i,j=1 \\ i+j\leq n+1}} (r_{i,j}^p)^2}{\frac{1}{2}n(n+1) - 2n + 1}$$

  Où $\frac{1}{2}n(n+1)$ correspond au nombre de données initiales du triangle et $2n-1$ correspond au nombre de paramètres du modèle.

  Les résidus finaux utilisés pour le boostrap sont :

$$r_{i,j} = \frac{r_{i,j}^p}{\sqrt{\phi}} \times \sqrt{\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{\frac{1}{2}n(n+1) - 2n + 1}}$$

Fin des étapes communes et début de la phase de simulation pour obtenir N montants de la charge ultime (les prochaines étapes sont effectuées pour les N simulations).

- **Etape 4 :** Ré-échantillonnage des résidus $r_{i,j}$ et obtention des nouveaux résidus $r_{i,j}^*$.

- **Etape 5 :** Reconstruction de la partie supérieure du triangle de paiement :

$$Z_{i,j}^{*} = r_{i,j}^{*}\sqrt{\phi\hat{Z}_{i,j}} + \hat{Z}_{i,j} \qquad \text{pour } i+j \leq n+1$$

$$C_{i,j}^{*} = Z_{i,j-1}^{*} + Z_{i,j}^{*}$$

- **Etape 6 :** Application de la méthode de Chain-Ladder sur ce nouveau triangle de paiements cumulés et détermination de la partie inférieure $\left(\hat{C}_{i,j}^{*}\right)_{i+j>n+1}$.

- **Etape 7 :** Calcul des réserves individuelles $\hat{R}_i^{*}$ et du montant de provision totale $\hat{R}^{*}$.

<u>Le modèle de Mack</u>

Les différentes étapes pour la construction d'une méthode « bootstap » pour le modèle de Mack sont les suivantes :

- **Etape 1 :** Détermination de $\hat{f}_j, \hat{\sigma}_j$ et $f_{i,j}$ à partir du triangle initial des paiements cumulés $\left(C_{i,j}\right)_{i+j\leq n+1}$.

- **Etape 2 :** Calcul des résidus de Mack : $r_{i,j} = \frac{\sqrt{C_{i,j}} \times \left(f_{i,j} - \hat{f}_j\right)}{\hat{\sigma}_j} \times \sqrt{\frac{n-j}{n-j-1}}$

Fin des étapes communes et début de la phase de simulation pour obtenir N montants de la charge ultime (les prochaines étapes sont effectuées pour les N simulations).

- **Etape 3 :** Ré-échantillonnage des résidus $r_{i,j}$ et récupération des nouveaux résidus $r_{i,j}^{*}$.

- **Etape 4 :** Reconstruction des facteurs de développement individuel :

$$f_{i,j}^{*} = r_{i,j}^{*}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_j^2}{C_{i,j}}} + \hat{f}_j$$

- **Etape 5 :** Estimation des nouveaux facteurs de développement $\hat{f}_j^{*}$ issus de la méthode Chain-Ladder :

$$\hat{f}_j^{*} = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} f'_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}}$$

- **Etape 6 :** Ré-estimation de la partie inférieure du triangle de paiements cumulés $\left(\hat{C}_{i,j}^{*}\right)_{i+j>n+1}$ à partir du triangle initial $\left(C_{i,j}\right)_{i+j\leq n+1}$ et des nouveaux facteurs de développement $\hat{f}_j^{*}$.

- **Etape 7 :** Calcul des réserves individuelles $\hat{R}_i^{*}$ et du montant de provision totale $\hat{R}^{*}$.

Les modèles GLM

Les différentes étapes pour la construction d'une méthode « bootstap » pour un modèle GLM sont les suivantes [19]:

- **Etape 1 :** Estimation des paramètres du modèle $\left(\hat{\mu}, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_n\right)$ à partir du triangle initial des paiements incrémentaux $\left(Z_{i,j}\right)_{i+j\leq n+1}$.

- **Etape 2 :** Calcul des résidus de Pearson :

$$r_{i,j} = \frac{Z_{i,j} - \hat{\mu}_{i,j}}{\sqrt{V\left(\hat{\mu}_{i,j}\right)}} \times \sqrt{\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{\frac{1}{2}n(n+1) - 2n + 1}}$$

Fin des étapes communes et début de la phase de simulation pour obtenir N montants de la charge ultime (les prochaines étapes sont effectuées pour les N simulations).

- **Etape 3 :** Ré-échantillonnage des résidus $r_{i,j}$et récupération des nouveaux résidus $r^*_{i,j}$.

- **Etape 4 :** Reconstruction de la partie supérieure du triangle de paiement :

$$Z^*_{i,j} = r^*_{i,j}\sqrt{V\left(\hat{\mu}_{i,j}\right)} + \hat{\mu}_{i,j} \qquad \text{pour } i + j \leq n + 1$$

- **Etape 5 :** Application du modèle GLM sur ce nouveau triangle de paiements incrémentaux $\left(Z^*_{i,j}\right)_{i+j\leq n+1}$ et détermination de la partie inférieure $\left(Z^*_{i,j}\right)_{i+j>n+1} = \left(\hat{\mu}^*_{i,j}\right)_{i+j>n+1}$.

- **Etape 6 :** Calcul des réserves individuelles $\hat{R}^*_i$ et du montant de provision totale $\hat{R}^*$.

[19] Dans le cas Log-Gamma et Log-Normale les modèles GLM Gamma et Normale sont appliqués sur les log-incréments $ln\left(Z_{i,j}\right)$.